第118回問題　解答

by H7K.

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

より，これがある $a \in \mathbb{N}^+$ を使い a^2 と書ければ良い．

さて，$2n+1 = n + (n+1)$ であるので，この 2 つはどれをとっても共通の約数を持たない．そのため，どの a のある素因数 p についても，この 3 つのどれか一つに，平方数の形で固まって存在する (但し 2, 3 については奇数乗の形で)．

これより，$xyz = 6$ を満たす $x, y, z, p, q, r \in \mathbb{N}^+$ を使い

$$n := xp^2 \qquad n+1 := yq^2 \qquad 2n+1 := zr^2$$

とおける．

さて，$2n+1 \equiv 3 \pmod 3$ であるので，$z = 1, 3$．これと「$\forall m \in \mathbb{N}; m \equiv 0, 1 \pmod{3 or 4}$」($\star$) より，$2n+1 \equiv 0, 1 \pmod 3$．

■$2n+1 \equiv 1 \pmod 3$ のとき $\to n \equiv 0 \pmod 3$

これの可能性としては，(a) $x = 1 \wedge p \equiv 0 \pmod 3$，$(b)$ $x = 2 \wedge p \equiv 0 \pmod 3$，$(c)$ $x = 3$，(d) $x = 6$ がある．

(a) の場合：

$z \not\equiv 0 \pmod 3$ より，$y = 3, 6$ だが，これは $n+1 \equiv 0 \pmod 3$ を示している事になり，矛盾．

(b) の場合：

$2n+1 \equiv 1 \pmod 4$ がわかり，($\star$) より $z = 1$．$\therefore y = 3$．しかしこれはまたも $n+1 \equiv 0 \pmod 3$ を示している事になり，矛盾．

(c) の場合：

$y = 2$ だが，($\star$) より，$n+1 \equiv 0, 2 \pmod 3$ がわかり，矛盾．

(d) の場合：

$(x, y, z) = (6, 1, 1)$ より，$r^2 - q^2 = 6p^2$．$\therefore r \equiv q \pmod 2 \wedge p \equiv 0 \pmod 2$．

よって，$p := 2p'$ とおくと，$q^2 = 24p'^2 + 1$ (α)，$r^2 = 48p'^2 + 1$ (β) と書ける．

これの最小解は $(p', q, r) = (1, 5, 7)$ であるので，$h, q', r' \in \mathbb{N}$ を使い，

$$p := 1 + h \qquad q := 1 + q' \qquad r := 1 + r'$$

とおき，これを (α)，(β) のそれぞれに代入すると

$$q'^2 + 10q' + 25 = 24h^2 + 48h + 25$$
$$h'^2 + 14q' + 49 = 48h^2 + 96h + 49$$

これより h を解の公式を使い $h =$ の形にすると

$$h = -1 \pm \frac{1}{48}\sqrt{48^2 + 960q' + 96q'^2} = -1 \pm \frac{1}{12}\sqrt{144 + 60q' + 6q'^2}$$
$$= -1 \pm \frac{1}{96}\sqrt{96^2 + 192 \cdot 14r' + 192r'^2} = -1 \pm \frac{1}{12}\sqrt{144 + 42r' + 3r'^2}$$

$h \in \mathbb{N}$ より，

$$144 + 60q' + 6q'^2 = 144 + 42r' + 3r'^2 = (12\alpha)^2$$

$$48+20q'+2q'^2=48+14r'+r'^2=48\alpha^2$$

これより $q'\equiv r'\equiv 0 \pmod 2$ がわかるので，$q':=2q''$，$r':=2r''$ とおくと

$$48+40q''+8q''^2=48+28r''+4r''^2=48\alpha^2$$

$$12+10q''+2q''^2=12+7r''+r''^2=12\alpha^2$$
$$2(q''+2)(q''+3)=(r''+3)(r''+4)$$

$\beta:=q''+2$，$\gamma:=r''+3$ とおくと，

$$2\beta(\beta+1)=\gamma(\gamma+1)$$

$\beta,\gamma\in\mathbb{N}^+$ であることに注意すると，これの解は $(\beta,\gamma)=(2,3)$ のみ．
よって，$(r'',q'')=(0,0)$ のみなので，$(p,q,r,n,a)=(2,5,7,24,70)$ (石の個数 $=4900$[コ]) のみ．//

■**$2n+1\equiv 0 \pmod 3$ のとき** $\to n\equiv 1 \pmod 3$
($\star$) より，$x=1$ である．さて，これの可能性としては，(e) $z=1\wedge r\equiv 0 \pmod 3$，($f$) $z=3$ がある．
(e) の場合：
$y=6$ だが，これは $n+1\equiv 0 \pmod 3$ を示している事になり，矛盾．
(f) の場合：
$(x,y,z)=(1,2,3)$ であるので，$2q^2=p^2+1$ (γ)．この場合の最小解は明らかに $(p,q,r)=(1,1,1)$ なので，$p',q',r'\in\mathbb{N}$ を使い，

$$p:=1+p' \qquad q:=1+q' \qquad r:=1+r'$$

とおき，(γ) に代入，整理すると

$$p'(p'+2)=2q'(q'+2)$$

これより，$p'\equiv 0 \pmod 2$ がわかるので，$p':=2p''$ とおくと

$$4p''(p''+1)=2q'(q'+2)$$
$$2p''(p''+1)=q'(q'+2)$$

これより，$q'\equiv 0 \pmod 2$ がわかるので，$q':=2q''$ とおくと

$$2p''(p''+1)=4q''(q''+1)$$
$$p''(p''+1)=2q''(q''+1)$$

これの解は $(p'',q'')=(3,2),(0,0)$ のみ．
それぞれについて，$(p,q)=(7,5),(1,1)$ となるが，前者だと $r^2=33$ となり，不適当．
ゆえに，$(p,q,r)=(1,1,1)$ のみで，このときの $(n,a,$石の個数$)=(1,1,1)$．

以上より，$(n,a,$石の個数$)=(1,1,1),(24,70,4900)$ のみ．//