(1) k 回目に取り出したとき得点 k が得られる事象をA_k、確率をp_k、
得点 k が得られない事象をB_k、確率を q_k とおく。

i) $k=n+1$ のとき、
p_{n+1}は n 回までに 1 から n までが順番に取り出される確率に等しいから

$p_{n+1}=\dfrac{{}_nC_n}{n^n}=\dfrac{1}{n^n}$ ・・・①

ii) $2\leqq k\leqq n$ のとき、
B_{k-1}が起こったときに限ってA_kまたはB_kが起こるから
$p_k+q_k=q_{k-1}$
そしてB_kの起こり方は
n 枚のカードから異なる k 枚を選ぶ組み合わせに等しいから

$q_k=\dfrac{{}_nC_k}{n^k}$

したがって

$p_k=q_{k-1}-q_k$ ・・・②

$=\dfrac{{}_nC_{k-1}}{n^{k-1}}-\dfrac{{}_nC_k}{n^k}$

$=\dfrac{n\cdot{}_nC_{k-1}}{n^k}-\dfrac{{}_nC_k}{n^k}$

$=\dfrac{n({}_{n+1}C_k-{}_nC_k)}{n^k}-\dfrac{{}_nC_k}{n^k}$ $(\because\ {}_{n+1}C_k={}_nC_k+{}_nC_{k-1})$

$=\dfrac{n\cdot{}_{n+1}C_k}{n^k}-\dfrac{(n+1){}_nC_k}{n^k}$

$=\dfrac{n\cdot{}_{n+1}C_k}{n^k}-\dfrac{(n+1)!(n-k+1)}{n^kk!(n-k+1)!}$

$=\dfrac{n\cdot{}_{n+1}C_k}{n^k}-\dfrac{(n-k+1){}_{n+1}C_k}{n^k}$

$=\dfrac{(k-1){}_{n+1}C_k}{n^k}$ ・・・③

③で $k=n+1$ とおくと①をみたすから
$2\leqq k\leqq n+1$ のとき

$p_k=\dfrac{(k-1){}_{n+1}C_k}{n^k}$ ・・・(答)

(2) $p_1=0$, $q_0=\dfrac{{}_nC_0}{n^0}=1$, $q_1=1$ であるから
②は $k=1$ のときも成り立つ。
したがって、

$f(n)=\sum_{k=1}^{n+1}kp_k$

$=\sum_{k=1}^{n+1}\{k(q_{k-1}-q_k)\}$

$=\sum_{k=0}^{n}q_k-(n+1)q_{n+1}$

ところが $q_{n+1}=0$ だから

$f(n)=\sum_{k=0}^{n}q_k$

$=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{{}_nC_k}{n^k}$

$={}_nC_k\cdot1^{n-k}\left(\dfrac{1}{n}\right)^k$

$=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ・・・(答)

したがって、
$f(n)\to e\quad(n\to\infty)$ ・・・(答)