(1)　$|-x^2|<1$, $n\to\infty$ のとき $2n\to\infty$ だから

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=1+\frac{-x^2}{1+x^2}$$
$$=\frac{1}{1+x^2}\quad \cdots(\text{答})$$

(2)　$x=\tan\theta$ とおいて、

$$\text{与式}=\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta=\frac{\pi}{6}\quad \cdots(\text{答})$$

(3)［証明］ $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ において

$$f_n(x)-\frac{1}{1+x^2}$$
$$=1+\frac{-x^2\{1-(-x^2)^{2n}\}}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}$$
$$=\frac{-(-x^2)^{2n+1}}{1+x^2}$$
$$=\frac{x^{4n+2}}{1+x^2}\geqq 0$$

したがって、

$$0\leqq\frac{x^{4n+2}}{1+x^2}\leqq x^{4n+2}$$

となるので

$$0<\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left\{f_n(x)-\frac{1}{1+x^2}\right\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{x^{4n+2}}{1+x^2}dx$$
$$<\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x^{4n+2}dx$$
$$=\left[\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{1}{4n+3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4n+3}$$

したがって、

$$0<\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left\{f_n(x)-\frac{1}{1+x^2}\right\}dx<\frac{1}{4n+3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4n+3}\qquad(\text{終})$$

(4)［証明］

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f_n(x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left\{1+\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k x^{2k}\right\}dx$$
$$=\left[x+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}\quad(\text{終})$$

(5)　(3)で $n\to\infty$ のとき、右辺$\to 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f_n(x)dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{6}\quad(\because (2))$$

一方(4)より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f_n(x)dx=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}-1\quad\cdots(\text{答})$$