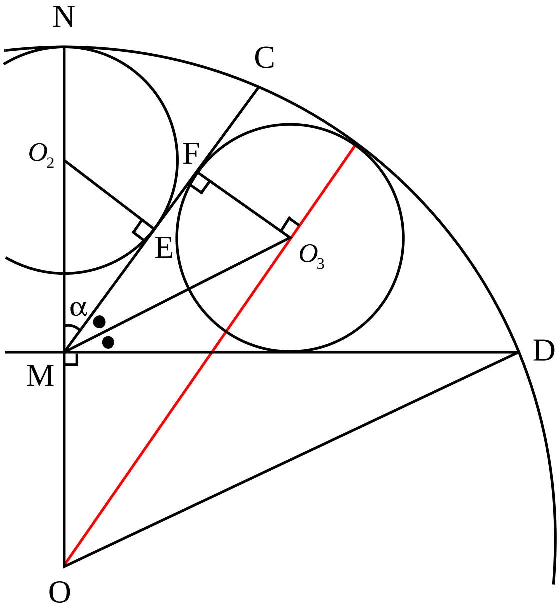
〔解答〕



3点 O, M, N は一直線上に並ぶから,

$$OM = ON - MN = R - b.$$

$\triangle OMD$ に三平方の定理を適用すると,

$$R^2 = (R-b)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

すなわち, $R = \dfrac{b}{2} + \dfrac{a^2}{8b}$　（・・・①）を得る.

さて, 中心 O_2 は線分 MN 上にあるから, 円 O_2 と線分 CM との接点を E, $\angle CMN = \alpha$ とおくと, $\triangle EMO_2$ から,

$$\sin\alpha = \frac{EO_2}{MO_2} = \frac{r}{b-r} \quad （・・・②）$$

を満たしている.

また, $O_3M = l$, $\angle CMD = 2\beta$, 円 O_3 と線分 MD との接点を F とおくと, $\triangle MFO_3$ から,

$$\sin\beta = \frac{O_3F}{O_3M} = \frac{r}{l}$$　（・・・③）を満たしている.

ここで, $\angle NMD = \alpha + 2\beta = 90^\circ$ より,

$$\sin^2\beta = \sin^2\frac{90^\circ - \alpha}{2} = \frac{1-\cos(90^\circ - \alpha)}{2} = \frac{1-\sin\alpha}{2} = \frac{b-2r}{2(b-r)} \quad (\because ②)（・・・④）$$

だから, ③とより,

$$\left(\frac{r}{l}\right)^2 = \frac{b-2r}{2(b-r)},$$ すなわち, $$l^2 = \frac{2r^2(b-r)}{b-2r}$$　（・・・⑤）を得る.

最後に, $\triangle OMO_3$ に余弦定理を適用すると, $OO_3 = R - r$, $\angle OMO_3 = \beta + 90^\circ$ より,

$$(R-r)^2 = (R-b)^2 + l^2 - 2l(R-b)\cos(\beta + 90^\circ)$$ を満たしている.

これに $\cos(\beta + 90^\circ) = -\sin\beta = -\dfrac{r}{l}$ 及び⑤を代入して, 展開, 整理すると,

$$(b-2r)^2(2R-b) = br^2$$　を導く.

これに①⇔ $2R - b = \dfrac{a^2}{4b}$ を代入して, 整理すると, $\{a(b-2r)\}^2 = (2br)^2$　を導く.

$b - 2r > 0$ から, 両辺の2乗の中身は正だから, $a(b-2r) = 2br$ を導く. これを r について解いて,

$$r = \frac{ab}{2(a+b)}$$　・・・・・・・・・(答え)

を得る.