(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n+1)!}$

マクローリン展開

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+ \quad \cdots①$$

より

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}- \quad \cdots②$$

そこで、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)-1}{(2n+1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\left(\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\right)+\cdots$$

$$=e^{-1} \quad (\because \ ②)$$

ですが、

「$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$ は既知として」

という条件の下で、①を既知としていいのかなぁ・・・