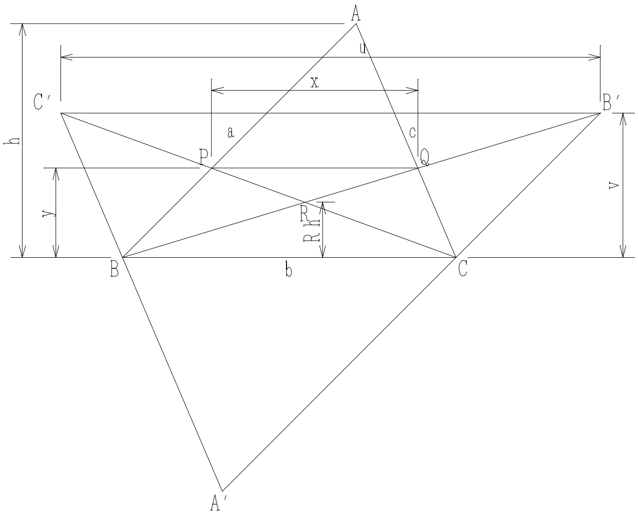

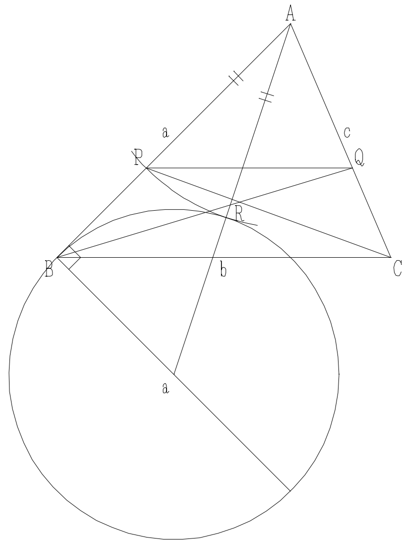

細かな証明は省略する．

左図のように，三角形 $\triangle ABC$ に相似な三角形 $\triangle A'B'C'$ を作図する．

三角形の面積の比 $\triangle RQP : \triangle RBC = \triangle RBC : \triangle RB'C'$ は,

$$x(y - R_h) : bR_h = bR_h : u(v - R_h) \tag{1}$$

$\dfrac{x}{b} = \dfrac{b}{u} = \dfrac{y}{v}$ から,

$$u = \frac{b^2}{x},\ v = \frac{by}{x} \tag{2}$$

また，$x = \dfrac{b}{h}(h - y)$ から,

$$u = \frac{bh}{h - y},\ v = \frac{hy}{h - y} \tag{3}$$

ここで，$h = a \sin \angle ABC = c \sin \angle ACB$ である．

(3) を (1) に代入して整理すると,

$$b^2(y - R_h)\left(\frac{hy}{h - y} - R_h\right) = b^2 {R_h}^2 \tag{4}$$

ここから,

$$R_h = \frac{hy}{2h - y} \tag{5}$$

よって，三角形 $\triangle RQP$ の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(y - R_h) && (6)\\ &= \frac{b}{2h}(h - y)\left(y - \frac{by}{2h - y}\right) && (7)\\ &= \frac{b(h^2y - 2hy^2 + y^3)}{2h(2h - y)} && (8) \end{aligned}$$

三角形 $\triangle RQP$ の面積 S が最大となるところは，その導関数 $S' = \dfrac{dS}{dy} = 0$ となるところである．

$$S' = \frac{dS}{dy} = \frac{b(h-y)(h^2-3hy+y^2)}{h(2h-y)^2} = 0 \tag{9}$$

したがって，

$$y = h,\ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}h \tag{10}$$

この内，三角形 $\triangle ABC$ の内部にある点は一つで，

$$y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}h \tag{11}$$

ここから，三角形 $\triangle ABC$ の辺の比 $AP : PB$ を求めると，

$$\begin{aligned}
AP : PB &= h - y : y && (12)\\
&= h - \frac{3-\sqrt{5}}{2}h : \frac{3-\sqrt{5}}{2}h && (13)\\
&= \sqrt{5} - 1 : 3 - \sqrt{5} && (14)\\
&= (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) : (3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1) && (15)\\
&= 2 : \sqrt{5} - 1 && (16)\\
&= 2(\sqrt{5}+1) : (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) && (17)\\
&= \sqrt{5} + 1 : 2 && (18)
\end{aligned}$$

よって，$AP : PB$ は黄金比である．
これを踏まえ，改めて作図すると，確かに前ページ右図と一致する．