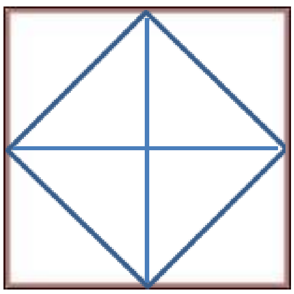
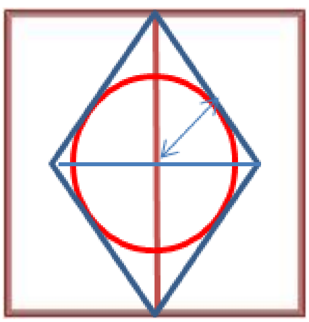
にいばりZ12です

問題１：一辺の長さが２の立方体がある。この立方体の６つの面の中心（対角線の交点）を頂点とする正八面体の表面積と内接球の半径を求めよ。

立方体の１つの面と垂直に三面図を描くと正面、側面、平面はすべて同一になります。
そこでとりあえず正面図を取り上げ作図すると下図のようになります



上図で外側の正方形が立方体の1つの面とすると
正８面体の１辺の長さは、内側の斜めの線分で
その長さは$\sqrt{2}$となります
正８面体はその構成面が正三角形なので
表面積は
$\{\sqrt{2}\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3}/2)\times 1/2\}\times 8=4\sqrt{3}$・・・回答
因みに体積は
$\{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 1\times 1/3\}\times 2=4/3$

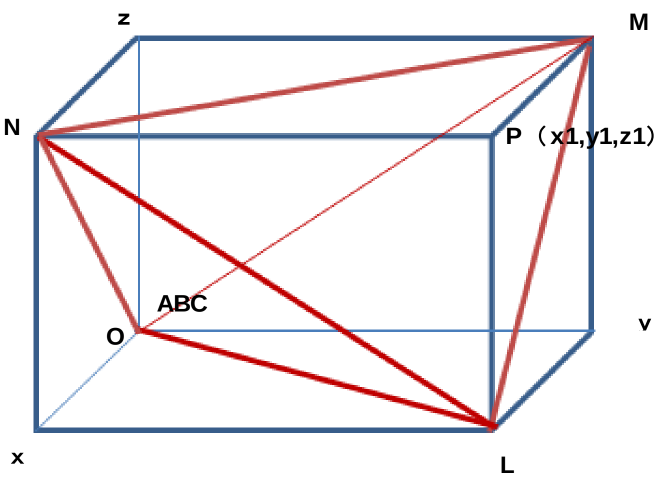


次に、正面図を４５度回転させると上図のようになり
８面体の１辺の長さは青の横線で$\sqrt{2}$
立方体の構成面の対角線は茶の横線で$2\sqrt{2}$
８面体・立方体の高さは茶の縦線で2
よって、内接球の半径は
高さ1底辺$\sqrt{2}/2$の直角三角形の斜辺に内接し、中心を直角の頂点に持つ円の半径に等しくなります
高さ1底辺$\sqrt{2}/2$の直角三角形の斜辺（上図の青の斜線）は$\sqrt{(1+(\sqrt{2}/2)^2)}=\sqrt{(3/2)}$
半径をｒとすると
$r : 1=\sqrt{2}/2 : \sqrt{(3/2)}$
$r=1/\sqrt{3}=\sqrt{3}/3$・・・・回答

問題２：３辺の長さがＢＣ＝２ａ，ＣＡ＝２ｂ，ＡＢ＝２ｃである鋭角三角形△ＡＢＣの３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの中点をそれぞれＬ，Ｍ，Ｎとする。線分ＬＭ，ＭＮ，ＮＬに沿って三角形を折り曲げ、四面体を作る。その際、線分ＢＬとＣＬ，ＣＭとＡＭ、ＡＮとＢＮはそれぞれ同一視されて、長さがa、ｂ、ｃの辺になるものとする。この四面体Ａ−ＬＭＮの体積を求めよ

問題を書き換えると
等面四面体の構成面を辺a,b,cからなる三角形としたときその体積を求めよ
（等面四面体の構成面は鋭角三角形に限られる）

問題の四面体に外接する並行6面体を考えます
いまO(=ABC)を原点としxyzの3次元座標に並行6面体の対面と埋め込む等面四面体をおくと下図のようになり



上図で明らかなように等面四面体に外接する並行6面体は直方体となります（四面体の交点を持たない辺がたがいに等しい。（並行6面体の対面の非並行対角線となるため））

並行6面体に埋め込まれた等面四面体の体積は並行6面体から埋め込まれた等面四面体以外の体積を引けば求め
並行6面体の体積
V6=x1y1z1
埋め込まれた等面四面体以外の体積
V’=NMLP+MNOz1+LONx1+OLMy1
NMLP≡MNO z1≡LON x1≡OLM y1
V’= NMLP×4= (x1y1×1/2×z1×1/3)×4= x1y1z1×2/3
よって等面四面体の体積V4は
V4= V6− V’= x1y1z1−x1y1z1×2/3= x1y1z1×1/3=XYZ/3・・・・・①
（添え字で紛らわしくなるのでx1=X,y1=Y,z1=Zとしました）
ここで問題図において２辺中点連結定理から
NL=b

$LM=c$
$MN=a$
また３平方の定理から
$b^2=Y^2+Z^2$
$c^2=X^2+Z^2$
$a^2=X^2+Y^2$
・・・・・②
辺々足すと
$(a^2+b^2+c^2)/2=X^2+Y^2+Z^2$
さらに②を引くと
$X^2=(a^2-b^2+c^2)/2$
$Y^2=(a^2+b^2-c^2)/2$
$Z^2=(-a^2+b^2+c^2)/2$
よって
$XYZ=(\sqrt{\ }((a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)/2)/2$
ゆえに
$V4= XYZ/3=(\sqrt{\ }((a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)/2)/6$・・・・・回答

問題2は当初、△ABCの垂心からABCまでの長さを求めると簡単に解けると考えいろいろやってみましたが中々上手く行かず立体の埋め込みという題意に立ち戻り考え直しました。なおその際に添付の本を参考にしました。（ほとんどカンニングに近いような気もしますので白状しておきます）