

● 第 346 回応募問題解答 <三角定規>

問題 1 (1)  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2}$  (2)  $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 5}$  (3)  $\frac{3}{10} = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 5}$  (4)  $\frac{3}{11} = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 11}$

問題 2 (1)  $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11}$  (2)  $\frac{3}{13} = \frac{1}{5} + \frac{1}{43} + \frac{1}{5 \cdot 13 \cdot 43}$

問題 3  $\frac{1}{c} \leq \frac{b}{a} < \frac{1}{c-1} \dots \textcircled{1}$

①の右側の不等式より,  $b(c-1) < a \therefore bc - a < b \therefore bc - a \leq b - 1 \dots \textcircled{2}$

$\frac{b}{a} - \frac{1}{c} = \frac{bc-a}{ac} \dots \textcircled{3}$

②より, ③の分子  $bc - a$  は  $b - 1$  以下である。【証了】

問題 4

①のとき,  $\frac{b}{a} = \frac{1}{c} + \frac{bc-a}{ac} \dots \textcircled{4}$  と書くことができ,

$\frac{bc-a}{ac} = \frac{b'}{a'}$  とおけば④と同様に  $\frac{b'}{a'} = \frac{1}{c'} + \frac{b'c'-a'}{a'c'}$  と書くことができ,

問題 3 の結果から  $b'c' - a'$  は  $b' - 1$  以下で  $b - 2$  以下である。

このことを繰り返せば,  $\frac{b}{a}$  は, 高々  $b$  個の分母が異なる単位分数の和として表される。

【証了】

問題 5

$\frac{3}{a} = \frac{1}{c} + \frac{3c-a}{ac}$  で  $3c-a$  は 2 以下, すなわち 1 または 2 だから,  $\frac{3}{a}$  は

(i)  $3c - a = 1$  すなわち  $a = 3c - 1$  のとき 2 個の単位分数の和で表される。( $a = 5, 11$ )

(ii)  $3c - a = 2$  であっても,  $a$  が偶数 ( $= 2a'$ ) のとき

$\frac{3}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a'c}$  となり, 2 個の単位分数の和で表される。( $a = 4, 10$ )

(iii) (i)(ii) 以外, すなわち  $a$  が奇数 かつ  $a = 3c - 2$  のとき 3 個の和で表される。

( $a = 7, 13$ )

《感想》鉛筆を動かしながら, 気がつきました。この分解は, 一意ではないのですね…

$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{60}$

$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{84}$

$\frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$

$\frac{3}{13} = \frac{1}{5} + \frac{1}{43} + \frac{1}{2795} = \frac{1}{6} + \frac{1}{26} + \frac{1}{39}$