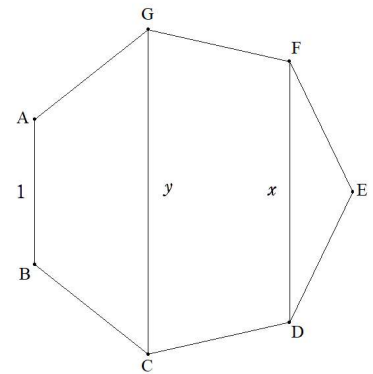


第 81 回

一辺の長さが1の正七角形 ABCDEFG があります。
 図の中にある2つの対角線 DF と CG の長さを x , y
 とするとき、 $(y+x)^2(y-x)=x^2y$ が成り立つことを
 示してください。



[証明] 正七角形 ABCDEFG の1辺を a , 対角線のうち、短い方を b , 長い方を c とおく。

四角形 ABCE にトレミーの定理を適用して、 $ab + ac = bc$

$$\therefore a = \frac{bc}{b+c} \quad \dots \textcircled{1}$$

同様に、四角形 ACEG にトレミーの定理を適用して、 $ab + b^2 = c^2$

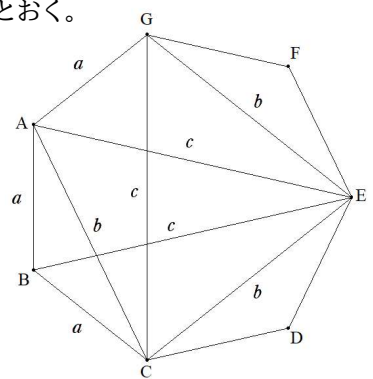
$$\therefore a = \frac{c^2 - b^2}{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{1} \text{より}, \frac{(c+b)(c-b)}{b} = \frac{bc}{c+b}$$

$$\text{分母を払うと}, (c+b)^2(c-b) = b^2c \quad \dots \textcircled{3}$$

最後に、 $a=1, b=x, c=y$ を代入すると、 $(y+x)^2(y-x)=x^2y$ **[終]**

[補足] ③は、 a の値が1に限らず成り立つ。



(2020/9/14 ジョーカー)