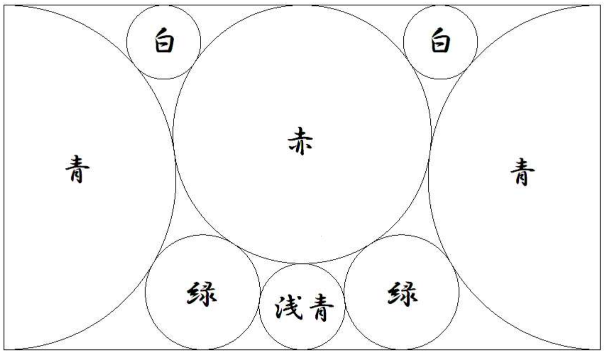
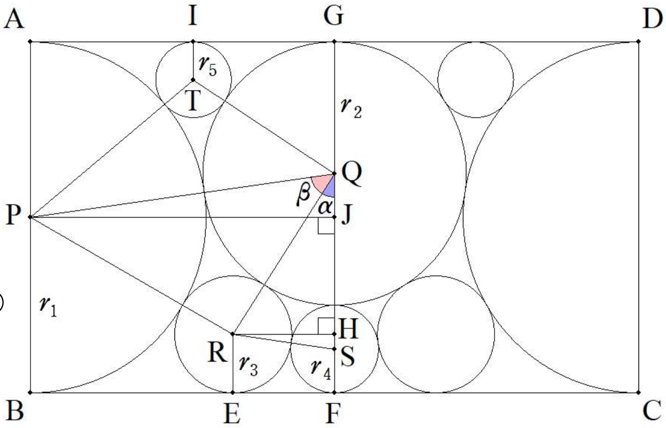
岐阜県大垣市明星輪寺の算額第4問題（改題）

長方形内に，図のように青半円２個，赤円１個，緑円２個，浅青円１個，白円２個を入れる。
長方形の縦を a とするとき，赤，緑，浅青，白円の直径をそれぞれ求めよ。
また，長方形の横を求めよ。



解答　図のように記号を付け，青，赤，緑，浅青，白円の半径をそれぞれ r_1， r_2， r_3， r_4， r_5 とおく。



$r_1=\frac{1}{2}a$ である。

AG＝BE＋EF より，$2\sqrt{r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_3}+2\sqrt{r_3r_4}$

$\sqrt{r_3r_4}=\sqrt{r_1}(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_3})$

両辺を２乗して，　$r_3r_4=r_1(r_2+r_3-2\sqrt{r_2r_3})$　　…①

△QRH に三平方の定理を適用すると，

QH＝$\sqrt{QR^2-RH^2}=\sqrt{(r_2+r_3)^2-(2\sqrt{r_3r_4})}$　　…②

また，QH＝GF－GQ－HF＝ $2r_1-r_2-r_3$　　…③

②，③より，　$\sqrt{(r_2+r_3)^2-(2\sqrt{r_3r_4})}=2r_1-r_2-r_3$

両辺を２乗して整理すると，　$4(r_1-r_4)r_3=4r_1{}^2-4r_1r_2-r_2{}^2$　　…④

次に，△QRSにおいて，余弦定理により，　$\cos\alpha=\frac{(r_2+r_3)^2+(r_2+r_4)^2-(r_3+r_4)^2}{2(r_2+r_3)(r_2+r_4)}=\frac{r_2{}^2+r_2r_3+r_2r_4-r_3r_4}{(r_2+r_3)(r_2+r_4)}$，

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{r_2r_3r_4(r_2+r_3+r_4)}}{(r_2+r_3)(r_2+r_4)}$

同様に，△PQRにおいて，余弦定理により，　$\cos\beta=\frac{(r_1+r_2)^2+(r_2+r_3)^2-(r_1+r_3)^2}{2(r_1+r_2)(r_2+r_3)}=\frac{r_2{}^2+r_1r_2+r_2r_3-r_1r_3}{(r_1+r_2)(r_2+r_3)}$，

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{(r_1+r_2)(r_2+r_3)}$

△PQJ は直角三角形であるから，　$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}$

これらを加法定理 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ に代入すると，

$$\frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}=\frac{2\sqrt{r_2r_3r_4(r_2+r_3+r_4)}}{(r_2+r_3)(r_2+r_4)}\cdot\frac{r_2{}^2+r_1r_2+r_2r_3-r_1r_3}{(r_1+r_2)(r_2+r_3)}+\frac{r_2{}^2+r_2r_3+r_2r_4-r_3r_4}{(r_2+r_3)(r_2+r_4)}\cdot\frac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{(r_1+r_2)(r_2+r_3)}$$

分母を払って整理すると，

$(r_2{}^2+r_2r_3+r_2r_4-r_3r_4)\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}+(r_2{}^2+r_1r_2+r_2r_3-r_1r_3)\sqrt{r_2r_3r_4(r_2+r_3+r_4)}-(r_2+r_3)^2(r_2$
$+r_4)\sqrt{r_1r_2}=0$　　…⑤

①，④，⑤を r_2， r_3， r_4 について解くと，題意に適するのは，$r_2=\frac{3}{4}r_1$， $r_3=\frac{1}{3}r_1$， $r_4=\frac{1}{4}r_1$　　…⑥

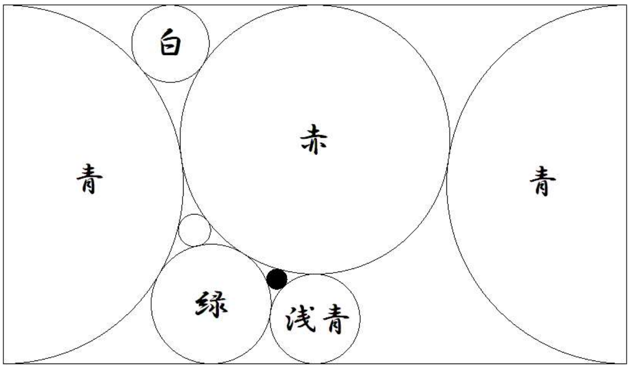
最後に，AI＋IG＝AGより，$2\sqrt{r_1r_5}+2\sqrt{r_2r_5}=2\sqrt{r_1r_2}$

$$\sqrt{r_5}=\frac{\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}}=\frac{\sqrt{r_1\cdot\frac{3}{4}r_1}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{\frac{3}{4}r_1}}=(2\sqrt{3}-3)\sqrt{r_1}\quad\therefore r_5=(21-12\sqrt{3})r_1\cdots⑦$$

⑥，⑦に $r_1=\dfrac{1}{2}a$ を代入すると，$2r_2=\dfrac{3}{4}a$，$2r_3=\dfrac{1}{3}a$，$2r_4=\dfrac{1}{4}a$，$2r_5=(21-12\sqrt{3})a$

よって，青，赤，緑，浅青，白円の直径は順に，$\dfrac{3}{4}a$，$\dfrac{1}{3}a$，$\dfrac{1}{4}a$，$(21-12\sqrt{3})a$　答

長方形の横は，$2\,\mathrm{AG}=2\cdot2\sqrt{r_1r_2}=4\sqrt{r_1\cdot\frac{3}{4}r_1}=2\sqrt{3}\,r_1=\sqrt{3}\,a$　答



補足　半径 r_1，r_2，r_3 の3円は互いに外接し，
それらに外接する円の半径を r とすると，

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2=2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

を満たす。（デカルトの円定理）
青半円，赤円，緑円で囲まれる白丸の円の直径は，

$$\frac{3(5\sqrt{3}-8)}{22}a$$

赤円，緑円，浅青円で囲まれる黒丸の円の直径は，

$$\frac{3(16\sqrt{3}-25)}{143}a$$

（2021/3/26　ジョーカー）