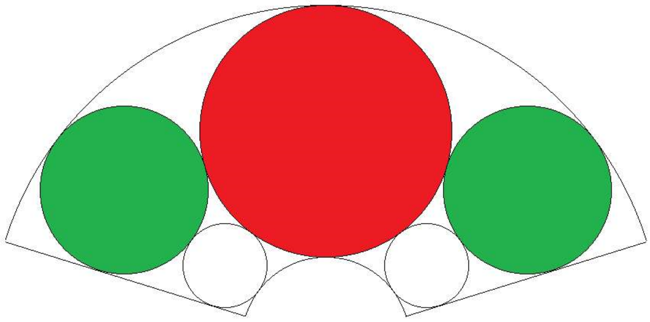
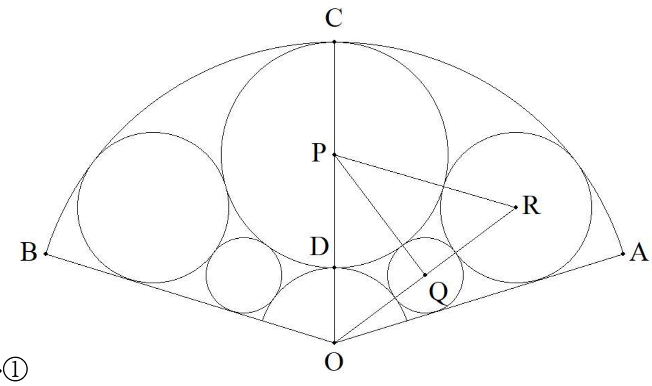
第359回（明星輪寺算額）

第１問（一ノ段）
扇の内に赤円，緑円，白円と５個の円が接している。
扇の半径を与えて白円が最大となるとき，赤円と白円の直径の和を求めよ。
出題者　沢慶作孝忠



術文（答）　赤円と白円の直径の和は扇の半径



解答　図のように記号を付け，OC=1とする。
赤白緑円の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3 とすると，
OD$=1-2r_1$
また，OR$=(1-2r_1)+2r_2+r_3=1-r_3$ より，
$r_3=r_1-r_2$
△OQPについて，OQ$=1-2r_1+r_2$，QP$=r_2+r_1$，
PO$=1-r_2$ であるから，余弦定理により，

$$\cos\angle OQP=\frac{(1-2r_2+r_2)^2+(r_2+r_1)^2-(1-r_1)^2}{2(1-2r_1+r_2)(r_2+r_1)}\quad\cdots①$$

同様に，△PQRについて，$\cos\angle PQR=\dfrac{{r_1}^2+(r_2+r_1)^2-(2r_1-r_2)^2}{2r_1(r_2+r_1)}\quad\cdots②$

∠PQP+∠PQR=180°であるから，$\cos\angle OQP+\cos\angle PQR=0$

①，②より，$\dfrac{(1-2r_2+r_2)^2+(r_2+r_1)^2-(1-r_1)^2}{2(1-2r_1+r_2)(r_2+r_1)}+\dfrac{{r_1}^2+(r_2+r_1)^2-(2r_1-r_2)^2}{2r_1(r_2+r_1)}=0$

分母を払って r_2 について整理すると，$2{r_2}^2+2(1-2r_1)r_2-r_1(1-r_1)=0$

$$r_2=\frac{-(1-2r_1)\pm\sqrt{(1-2r_1)^2+2r_1(1-2r_1)}}{2}$$

$r_1<\dfrac{1}{2}$ であるから，$r_2>0$ となるのは，$r_2=\dfrac{-(1-2r_1)+\sqrt{1-2r_1}}{2}\quad\cdots③$

これを r_1 の関数とみて，微分すると，

$$\frac{dr_2}{dr_1}=\frac{1}{2}\left(2+\frac{-2}{2\sqrt{1-2r_1}}\right)=\frac{2\sqrt{1-2r_1}-1}{2\sqrt{1-2r_1}}=\frac{3-8r_1}{2\sqrt{1-2r_1}(2\sqrt{1-2r_1}+1)}$$

$\dfrac{dr_2}{dr_1}=0$ とおくと，$r_1=\dfrac{3}{8}$

$r_1<\dfrac{3}{8}$ のとき，$\dfrac{dr_2}{dr_1}>0$，$r_1>\dfrac{3}{8}$ のとき，$\dfrac{dr_2}{dr_1}<0$ であるから r_2 は，$r_1=\dfrac{3}{8}$ のとき，極大かつ最大となる。

最大値は，③より，$r_2=\dfrac{1}{8}$

よって赤円と白円の直径の和は，$2r_1+3r_2=2\cdot\dfrac{3}{8}+2\cdot\dfrac{1}{8}=1$ これは扇形の半径に等しい。

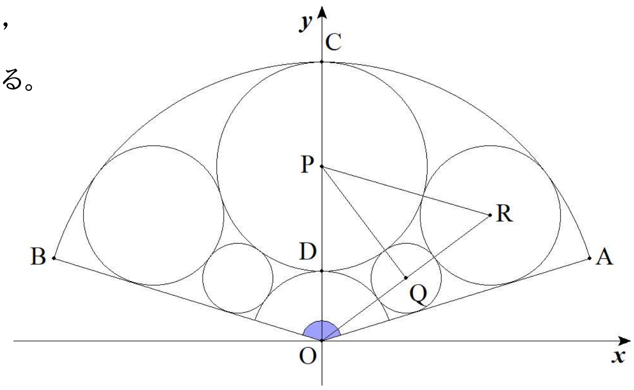
よって，白円が最大となるとき，赤円と白円の直径の和は扇の半径に等しい。　答

補足　このとき，緑円の半径 r_3 は，$r_3=r_1-r_2=\dfrac{1}{4}$ となり，

△OQP≡∠RQPで，三辺の比が，3:4:5 の直角三角形になる。

∠OPQ＝αとおくと，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{8}\cos\alpha,\ \dfrac{3}{8}\sin\alpha\right)\quad\therefore\left(\dfrac{12}{40},\ \dfrac{9}{40}\right)$



OCを y 軸，Oを原点にとり，扇形の中心角を 2θ とすると，

直線 OA の方程式は，$y=\dfrac{x}{\tan\theta}\quad\therefore x-y\tan\theta=0$

これと点 Q の距離が $\dfrac{1}{8}$ であるから，$\dfrac{\left|\dfrac{12}{40}-\dfrac{9}{40}\tan\theta\right|}{\sqrt{1^2+(-\tan\theta)^2}}=\dfrac{1}{8}$

題意に適するのは，$\tan\theta=\dfrac{54+25\sqrt{2}}{28}$ （$\sin\theta=\dfrac{3+8\sqrt{2}}{15}$）　$\therefore\theta\fallingdotseq72.6013°$

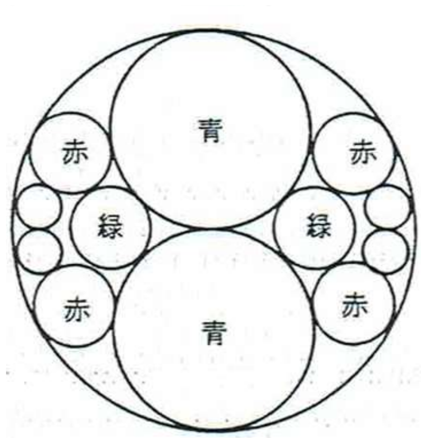
よって中心角 2θ は，約 145.2° である。

第 3 問（八ノ段）

外円内に青，緑，赤，白の 12 個の円をそれぞれ接するように入れる。

外側の円の直径が与えられたときの白円の直径を求めよ。

出題者　足立留平治孝常



術文（答）　白円の直径は外側の円の直径÷8

解答　図のように記号を付ける。

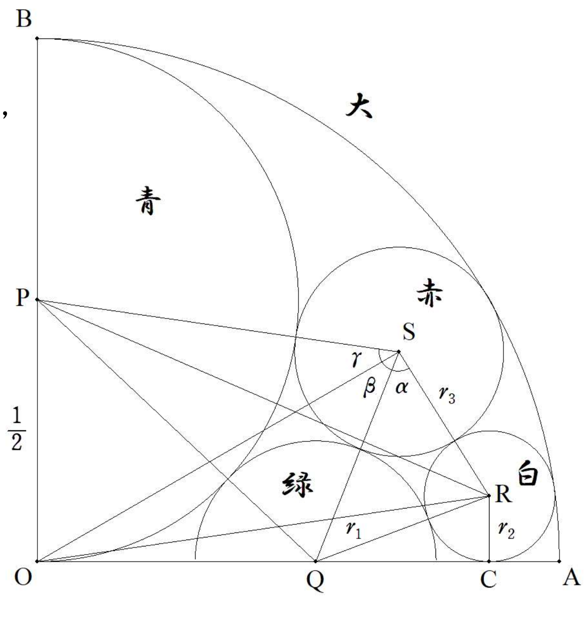
大円の半径を 1 とすると，青円の半径は $\dfrac{1}{2}$ となる。

緑白赤円の中心（半径）をそれぞれQ(r_1)，R(r_2)，S（r_3)とし，

∠RSQ＝α，∠QSO＝β，∠OSP＝γ とおく。

△POQ に三平方の定理を適用して，

$\mathrm{OQ}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}+r_1\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{r_1{}^2+r_1}$



△RQC に三平方の定理を適用して，

$\mathrm{QC}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_2{}^2}=\sqrt{r_1{}^2+2r_1r_2}$

△ROC に三平方の定理を適用して，

$\left(\sqrt{r_1{}^2+r_1}+\sqrt{r_1{}^2+2r_1r_2}\right)^2+r_2{}^2=(1-r_2)^2$

整理すると，$(1+r_1)(1-2r_2)(1-3r_1-2r_2-2r_1r_2)=0$

$r_1>0$，$r_2<\dfrac{1}{2}$ より，$\therefore r_2=\dfrac{1-3r_1}{2+2r_1}$　…①

△RSQ に余弦定理を適用すると，$\cos\alpha=\dfrac{(r_1+r_3)^2+(r_2+r_3)^2-(r_1+r_2)}{2(r_1+r_3)(r_2+r_3)}=\dfrac{-r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3+r_3{}^2}{(r_1+r_3)(r_2+r_3)}$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{(r_1+r_3)(r_2+r_3)}$$

△QSO に余弦定理を適用すると，

$$\cos\beta=\frac{(1-r_3)^2+(r_1+r_3)^2-\left(\sqrt{r_1{}^2+r_1}\right)^2}{2(1-r_3)(r_1+r_3)}=\frac{1-r_1-2r_3+2r_1r_3+2r_3{}^2}{2(1-r_3)(r_1+r_3)}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{(1+r_1)(-1+3r_2+4r_3-4r_1r_3-4r_3{}^2)}}{2(1-r_3)(r_1+r_3)}$$

△OSP に余弦定理を適用すると，$\cos\gamma=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+r_3\right)^2+(1-r_3)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{2\left(\dfrac{1}{2}+r_3\right)(1-r_3)}=\dfrac{1-r_3+2r_3{}^2}{(1-r_3)(1+2r_3)}$

$$\sin\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\frac{2\sqrt{r_3(1-2r_3)}}{(1-r_3)(1+2r_3)}$$

△RSO に余弦定理を適用すると，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{(1-r_3)^2+(r_2+r_3)^2-(1-r_2)^2}{2(1-r_3)(r_2+r_3)}=\dfrac{r_2-r_3+r_2r_3+r_3{}^2}{2(1-r_3)(r_2+r_3)}$

△QSP に余弦定理を適用すると，$\cos(\beta+\gamma)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+r_3\right)^2+(r_1+r_3)^2-\left(\dfrac{1}{2}+r_1\right)^2}{2\left(\dfrac{1}{2}+r_3\right)(r_1+r_3)}=\dfrac{-r_1+r_3+2r_1r_2+2r_3{}^2}{(r_1+r_3)(1+2r_3)}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ であるから，上記の式を代入すると，

$$\frac{r_2-r_3+r_2r_3+r_3{}^2}{2(1-r_3)(r_2+r_3)}=\frac{-r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3+r_3{}^2}{(r_1+r_3)(r_2+r_3)}\cdot\frac{1-r_1-2r_3+2r_1r_3+2r_3{}^2}{2(1-r_3)(r_1+r_3)}$$
$$-\frac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{(r_1+r_3)(r_2+r_3)}\cdot\frac{\sqrt{(1+r_1)(-1+3r_2+4r_3-4r_1r_3-4r_3{}^2)}}{2(1-r_3)(r_1+r_3)}$$

整理すると，

$$(1+r_1)(r_1+r_2)^2\{r_1(r_2{}^2-14r_2r_3+8r_2{}^2r_3+r_3{}^2+8r_2r_3{}^2+16r_2{}^2r_3{}^2)+r_2{}^2+2r_2r_3-8r_2{}^2r_3+r_3{}^3-8r_2r_3{}^2+16r_2{}^2r_3{}^2\}=0$$

$r_1>0$，$r_1+r_2>0$ より，$r_1=\dfrac{-r_2{}^2-2r_2r_3+8r_2{}^2r_3-r_3{}^2+8r_2r_3{}^2-16r_2{}^2r_3{}^2}{r_2{}^2-14r_2r_3+8r_2{}^2r_3+r_3{}^2+8r_2r_3{}^2+16r_2{}^2r_3{}^2}$　…②

同様に，$\cos(\beta+\gamma)=\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma$ であるから，

$$\frac{-r_1+r_3+2r_1r_2+2r_3{}^2}{(r_1+r_3)(1+2r_3)}=\frac{1-r_1-2r_3+2r_1r_3+2r_3{}^2}{2(1-r_3)(r_1+r_3)}\cdot\frac{1-r_3+2r_3{}^2}{(1-r_3)(1+2r_3)}$$
$$-\frac{\sqrt{(1+r_1)(-1+3r_2+4r_3-4r_1r_3-4r_3{}^2)}}{2(1-r_3)(r_1+r_3)}\cdot\frac{2\sqrt{r_3(1-2r_3)}}{(1-r_3)(1+2r_3)}$$

整理すると，$(1+r_1)(1-r_3)^2(1-2r_3)(1+r_1-2r_3-18r_1r_3)=0$

$r_1>0$，$r_3<\dfrac{1}{2}$ より，$r_3=\dfrac{1+r_1}{2+18r_1}$　…③

①，③を②に代入し整理すると，$r_1(r_1+1)(7r_1-1)(13r_1-3)=0$

題意に適するのは，$r_1=\dfrac{3}{13}$　このとき，$r_2=\dfrac{1}{8}$，$r_3=\dfrac{1}{5}$

よって，大円の半径を 1 とすると白円の半径 $r_2=\dfrac{1}{8}$ であるから，白円の直径は外円の直径の $\dfrac{1}{8}$　答

補足　緑円，赤円の直径は大円の直径のそれぞれ $\dfrac{3}{13}$，$\dfrac{1}{5}$

(2021/4/12　ジョーカー)