第383回数学的な応募問題<解答募集期間：2月16日～3月15日>［ワクチン投与］

今，新型コロナウイルス肺炎で大変なことになっています。

ある肺炎の人にワクチンAを投与して治療すれば，その人の症状が等しい確率で，「改善」，「変化なし」，「悪化」のいずれかに分類される状態になるとき，次の質問に答えよ。

（問題1）　3人に投与したとき，

⑴　2人以上「改善」される確率を求めよ。

⑵　3種類の状態になる確率を求めよ。

（問題2）　6人に投与したとき，

⑴　4人以上「改善」される確率を求めよ。

⑵　3種類の状態になる確率を求めよ。

⑶　3人ずつが同じ状態になる確率を求めよ。

ここで，投与するワクチンをBに変えます。このワクチンBで治療すれば，「改善」，「変化なし」，「悪化」になる確率は，それぞれ$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$です。次の質問に答えよ。

（問題3）　5人に投与したとき，

⑴　2人「改善」，2人「変化なし」，1人「悪化」となる確率を求めよ。

⑵　3人以上「改善」される確率を求めよ。

⑶　3種類の状態になる確率を求めよ。

また，確率は分数と小数第1位を四捨五入して何%の両方書いておいてください。

解答

（問題 1）

(1)　3 人改善の確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^3$，2 人改善の確率は ${}_3C_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}$ で，

これらは排反であるから，求める確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_3C_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{7}{27}$（約 26 %）　答

(2)　3 種類の分類の順列が，3! であるから，求める確率は，$3!\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$（約 22 %）　答

（問題 2）

(1)　6 人改善の確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^6$，5 人改善の確率は ${}_6C_5\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\times\frac{2}{3}$，4 人改善の確率は ${}_6C_4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2$ で，

これらは排反であるから，求める確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^6+{}_6C_5\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\times\frac{2}{3}+{}_6C_4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{73}{729}$（約 10 %）　答

(2)　3 種類の状態になる 3 人を選べば，他の 3 人は 3 種類のうち，何でもよいから，

$${}_6C_3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times 1^3=\frac{20}{27}$$（約 74 %）　答

(3)　「改善」，「変化なし」，「悪化」をそれぞれ○，△，×で表すと，
○○○△△△，○○○×××，△△△×××の 3 つの事象が考えられる。

どの事象の確率も等しいから，$\frac{6!}{3!3!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^6\times 3=\frac{20}{243}$（約 8 %）　答

（問題 3）「改善」，「変化なし」，「悪化」をそれぞれ○，△，×で表す。それぞれの確率は，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$ である。

(1)　○○△△×　$\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$（約 14 %）　答

(2)　事象○の余事象を●で表す。3 人改善される事象は，次の 3 つに場合分けできる。

[1]　○○○○○　$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

[2]　○○○○●　${}_5C_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{32}$

[3]　○○○●●　${}_5C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

これらは排反であるから，求める確率は，$\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{5}{16}=\frac{1}{2}$（50 %）　答

(3)　3 種類の状態になる事象は次の 6 通り。

[1]　○○○△×　$\frac{5!}{3!1!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{20}{144}$　　[2]　○△△△×　$\frac{5!}{1!3!1!}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{6}=\frac{20}{324}$

[3]　○△×××　$\frac{5!}{1!1!3!}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{20}{1296}$　　[4]　○○△△×　$\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{30}{216}$

[5]　○○△××　$\frac{5!}{2!1!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{30}{432}$　　[6]　○△△××　$\frac{5!}{1!2!2!}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{30}{648}$

これらは排反であるから，求める 3 種類の状態になる確率は，

$$\frac{20}{144}+\frac{20}{324}+\frac{20}{1296}+\frac{30}{216}+\frac{30}{432}+\frac{30}{648}=\frac{305}{648}$$（約 47 %）　答

（2020/2/22　ジョーカー）