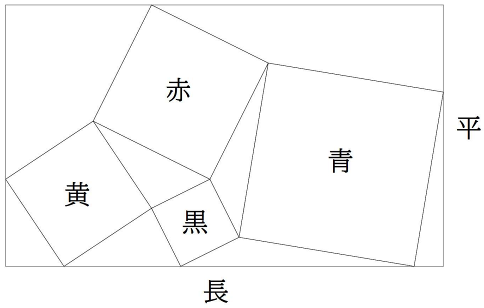
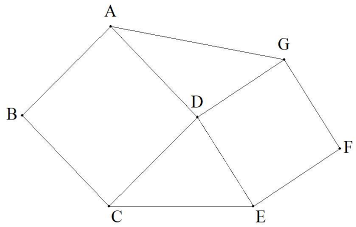
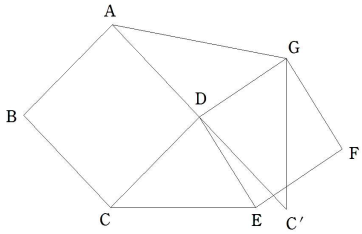
第 385 回第 6 問題

長方形に四個の異なる正方形黒，赤，青，黄を入れる。
長方形の長辺の長さを知って短辺の長さを求めよ。



初めに 2 つの定理を証明する。

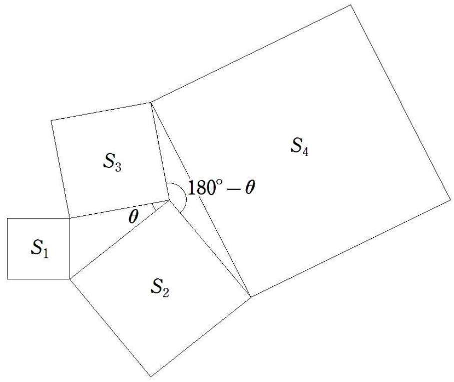




定理 1　四角形 ABCD，DEFG が正方形のとき，
△GAD＝△DCE である。

証明　△DCE を D 中心に 90° だけ回転させ，△DC′G をつくると（右図），D は AC′ の中点となるから，△GAD＝△GDC′＝△DCE　終

定理 2　面積が S_1，S_2，S_3，S_4 である 4 つの正方形が右図のように配置されているとき，$S_1+S_4=2(S_2+S_3)$ である。

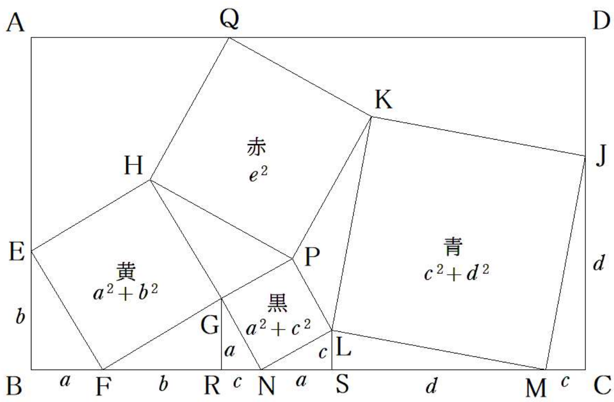


証明　2 つの向かい合う三角形の角に，図のように記号を付け，余弦定理を適用する。$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ であるから，

$S_1=S_2+S_3-2\sqrt{S_2}\sqrt{S_3}\cos\theta$，$S_4=S_2+S_3+2\sqrt{S_2}\sqrt{S_3}\cos\theta$

この 2 式を辺々加えると，$S_1+S_4=2(S_2+S_3)$　終

解答



図のように記号を付け，BF＝a，FR＝b，RN＝c，SM＝d とおくと，EB＝b，GR＝NS＝a，LS＝MC＝c，JC＝d である。（∵△EBF＝△FRG，△GRN＝△NSL，△LSM＝△MCJ より）

面積は，黄＝a^2+b^2，青＝c^2+d^2，黒＝a^2+c^2 である。

正方形赤の 1 辺を e とすると，赤＝e^2 である。

定理 1 より，△GFN＝△GPH＝△PLK＝△LNMである。

$\frac{1}{2}(b+c)a=\frac{1}{2}(a+d)c \quad \therefore d=\frac{ab}{c} \quad$ …①

定理 2より，2 (赤＋黒)＝黄＋青であるから，①を代入して

$$2\{e^2+(a^2+c^2)\}=(a^2+b^2)+\left\{c^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2\right\} \quad \therefore e^2=\frac{(a^2+c^2)(b^2-c^2)}{2c^2} \quad \cdots ②$$

同様に，赤＋FN²＝2 (黄＋黒)より，$\frac{(a^2+c^2)(b^2-c^2)}{2c^2}+(b+c)^2=2\{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)\}$

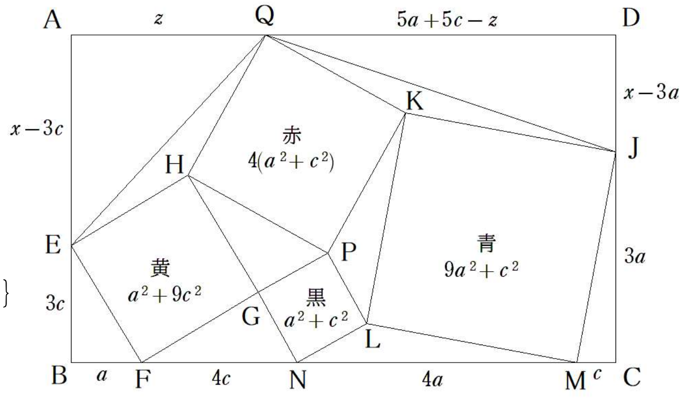
整理すると，$-(b-3c)\{(b+3c)a^2-c^2(b-c)\}=0 \quad \therefore b=3c，a^2=\frac{b-c}{b+3c} \quad$ …③

同様に，赤＋ NM² ＝2 (黒＋青)より，①を代入して，$\frac{(a^2+c^2)(b^2-c^2)}{2c^2}+\left(a+\frac{ab}{c}\right)^2=2\left\{a^2+c^2+c^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2\right\}$

整理すると，　$-(b-3)\{(b-c)a^2-c^2(b+3c)\}=0$　$\therefore b=3c$，$a^2=\dfrac{b+3c}{b-c}$　…④

③，④より，$\therefore b=3c$　…⑤　これを①に代入すると，$d=3a$　…⑥

補足　⑤を②に代入すると，$e^2=4(a^2+c^2)$　よって，赤＝黒×2^2 より，正方形黒の１辺は $\dfrac{e}{2}$ であることがわかる。



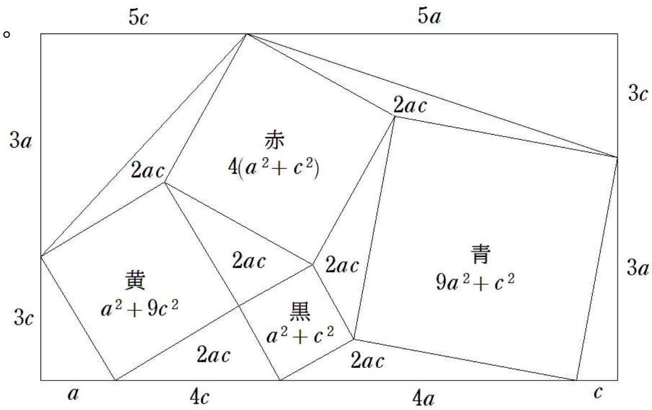
⑤，⑥のときの図を新たに示す。
BC＝$5(a+c)$ である。
ここで，AB＝x，AQ＝z とおくと，AE＝$x-3c$，
QD＝$5a+5c-z$，DJ＝$x-3a$ である。
定理２より，EQ^2＋黒＝2(黄＋赤) であるから，
$\{(x-3c)^2+z^2\}+(a^2+c^2)=2\{(a^2+9c^2)+4(a^2+c^2)\}$
整理すると，$x^2+z^2-6cx-9a^2-16c^2=0$　…⑦
同様に，QJ^2＋黒＝2(青＋赤) より
$\{(x-3a)^2+(5a+5c-z)^2\}+(a^2+c^2)=2\{(9a^2+c^2)+4(a^2+c^2)\}$
整理すると，$x^2+z^2-6ax-10cz+9a^2+50ac+16c^2=0$　…⑧

⑦−⑧より，$2\{3(a-c)x+5(a+c)z-9a^2-25ac-16c^2\}=0$　$\therefore z=\dfrac{9a^2+25ac+16c^2-3(a-c)x}{5(a+c)}$　…⑨

これを⑦に代入して整理すると，$\{x-3(a+c)\}\{(17a^2+16ac+17c^2)x+24(a-c)^2(a+c)\}=0$
{ }の中は正なので，$x=3(a+c)$
これを⑨に代入すると，$z=5c$

長方形の長辺を y とすると，$y=5(a+c)$，$x=3(a+c)=\dfrac{3}{5}y$　答

補足　以上の計算結果をまとめると，右の図の通りとなる。
（赤と黒の相似比は２：１）



（2020/4/18　ジョーカー）