第 387 回

1 から $2k$（k は自然数）までの連続する自然数を k 個ずつ A 組，B 組の 2 組に分け，A 組の数を a_1，a_2，…，a_k とし，B 組の数を b_1，b_2，…，b_k とする。b_1，b_2，…，b_k のうち a_1 より小さいものの個数を m_1 とする。同様にB組の数のうち a_2，a_3，…，a_k より小さいものの個数をそれぞれ m_2，m_3，…，m_k とするとき，$(a_1+a_2+\cdots+a_k)-(m_1+m_2+\cdots+m_k)$ の値は A 組，B 組の 2 組の分け方に関係せず一定な値を取る。この一定値を求めよ。

解答　1 から $2k$（k は自然数）までの連続する自然数を k 個ずつ A 組，B 組の 2 組に分けたとき，A 組の数を小さい方から並べて a_1，a_2，…，a_k とし，B 組の数も小さい方から並べて b_1，b_2，…，b_k としても一般性は失わない。
すなわち，$a_1<a_2<\cdots<a_k$，$b_1<b_2<\cdots<b_k$ とする。

$(a_1+a_2+\cdots+a_k)-(m_1+m_2+\cdots+m_k)$

$=(a_1-m_1)+(a_2-m_2)+\cdots+(a_k-m_k)=1+2+\cdots+k$　　(*)

$=\dfrac{1}{2}k(k+1)$　答

(*)　証明

（a_1-m_1の値について）

a_1 より小さ数は（a_1-1）個ですべて B に含まれているから，$m_1=a_1-1$

よって，$a_1-m_1=1$

（a_2-m_2 の値について）

a_2 より小さ数は（a_2-1）個で その中にa_1 が含まれているから，残りは B に含まれていることになる。その個数は（a_2-2）個であるから，$m_2=a_1-2$

よって，$a_2-m_2=2$

以下同様に，$i=3,\ 4,\ \cdots,\ k$ の場合

（a_i-m_i の値について）

a_i より小さ数は（a_i-1）個で その中にa_1 から a_{i-1} の $(i-1)$ 個が含まれているから，残りは B に含まれていることになる。その個数は$\{a_i-1-(i-1)\}=(a_i-i)$ 個であるから，$m_i=a_i-i$

よって，$a_i-m_i=i$　終

（2020/6/25　ジョーカー）