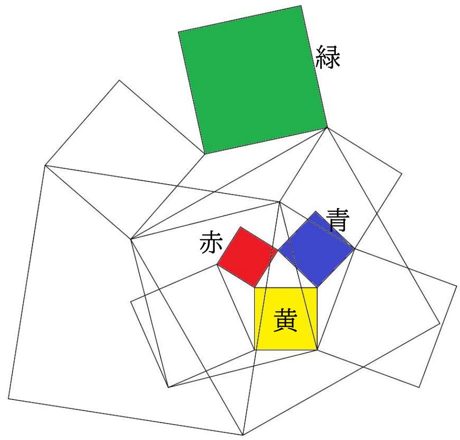
第387回追加問題（正方形11個問題）

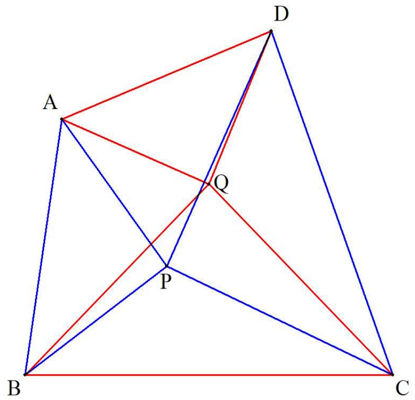
11個の正方形が右図のように配置されている。
赤，青，黄の面積がそれぞれ2，3，4のとき，
緑の面積を求めよ。



解説　必要な定理を整理しておきます。

定理1　（四角形内の4個の直角二等辺三角形に関する定理）

四角形ABCDの内部に点P，Qをとり，△PAB，△PCD，△QBCが直角二等辺三角形になるとき，△QDAも直角二等辺三角形になる。



証明　対角線の交点をTとする。

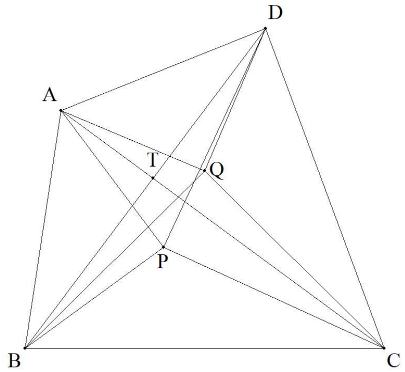
△PCAと△PDBについて，PC=PD　…①　PA=PC　…②

∠APC=∠APD+90°=∠BPD　…③

①，②，③より，２辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△PCA≡△PDB

∴AC=BD　…④

また，∠APB=90°より，△PDBは△PCAをP中心に90°回転させたものであるから，AC⊥BD　…⑤



次に，∠BTC=∠BQC（=90°）であるから，円周角の定理の逆により，
四角形BCQTは円に内接する。

∴∠DBQ=∠TBQ=∠TCQ（円周角）=∠ACQ　…⑥

△QDBと△QACについて，④より，DB=AC　…⑦　BQ=CQ　…⑧

⑦，⑧，⑥より，２辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△QDB≡△QAC

∴QD=QA　…⑨

また，⑤より，△QACは△QDBをQ中心に90°回転させたものであるから，

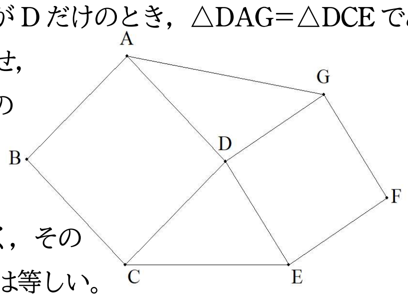
∠DQA=90°　…⑩

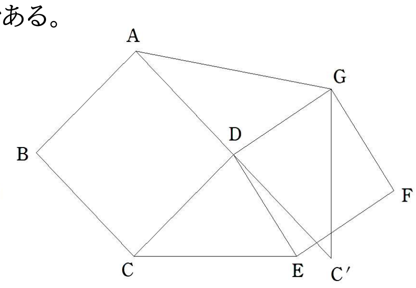
よって，⑨，⑩より△QDAは直角二等辺三角形となる。　終

定理2　正方形ABCD，DEFGの共有点がDだけのとき，△DAG=△DCEである。

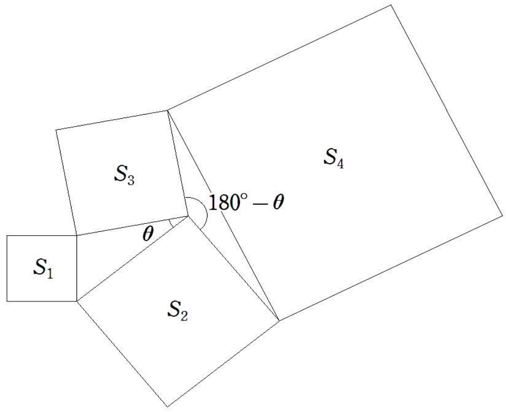
証明　△DCEをD中心に90°だけ回転させ，
△DC′Gをつくると（右図），DはAC′の
中点となるから，
△DAG=△DC′G=△DCE　終

（別証）△DAGと△DCEは２辺が等しく，その
２辺のなす角の正弦の値が等しいから面積は等しい。





定理 3　面積が S_1，S_2，S_3，S_4 である正方形が次の図のように配置されているとき，$S_1+S_4=2(S_2+S_3)$ である。



証明　2つの向かい合う三角形の角に，図のように記号を付け，余弦定理を適用する。

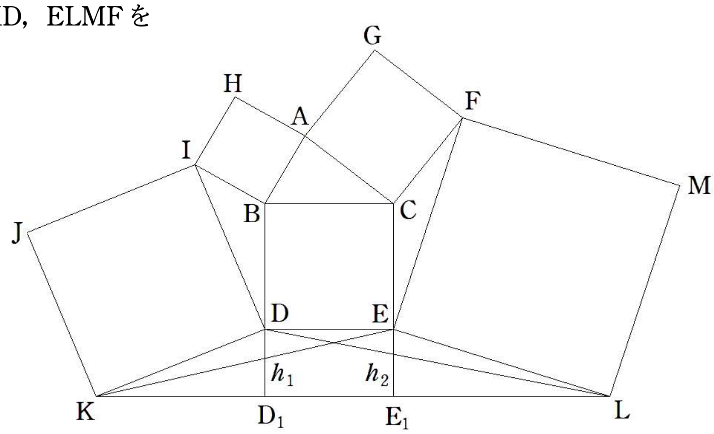
$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$ であるから，

$S_1=S_2+S_3-2\sqrt{S_2}\sqrt{S_3}\cos\theta$，$S_4=S_2+S_3+2\sqrt{S_2}\sqrt{S_3}\cos\theta$

この2式を辺々加えると，$S_1+S_4=2(S_2+S_3)$　終

$\therefore S_4=2(S_2+S_3)-S_1$

定理 4　△ABCの外側に各辺を1辺に持つ正方形 BDEC，CFGA，AHIB をつくり，さらに外側に正方形 IJKD，ELMF をつくると，KL$=4a$（$=4$ DE）



証明　$\triangle ABC=S$ とおくと，$\triangle BID=\triangle DKE=S$ である。（∵定理2）

△DKE について，DE を底辺としたときの高さを h_1 とすると，$\frac{1}{2}ah_1=S$ より，$h_1=\frac{2S}{a}$

同様に，$\triangle CEF=\triangle EDL=S$ であるから，△EDL について，DE を底辺としたときの高さを h_2 とすると，$\frac{1}{2}ah_2=S$ より，$h_2=\frac{2S}{a}$（$h_1=h_2$）

次に，D，E から KL に下した垂線の足をそれぞれ D_1，E_1 とおく。

$\triangle DKD_1$ に三平方の定理を適用すると，定理3と $(4S)^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ より，

$$KD_1=\sqrt{KD_1{}^2-DD_1{}^2}=\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2-\left(\frac{2S}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{4a^2(2c^2+2a^2-b^2)-(4S)^2}}{2a}=\frac{3a^2-b^2+c^2}{2a}$$

同様に，$E_1L=\sqrt{LE_1{}^2-EE_1{}^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2-\left(\frac{2S}{a}\right)^2}=\frac{3a^2+b^2-c^2}{2a}$

したがって，$KL=KD_1+D_1E_1+E_1L=\frac{3a^2-b^2+c^2}{2a}+a+\frac{3a^2+b^2-c^2}{2a}=4a$　終

解答　図のように記号を付ける。

定理3より，$S_1=2$(赤＋黄)−青$=2(2+4)-3=9$

同様に，$S_2=2$(青＋黄)−赤$=2(3+4)-2=12$

$S_3=2(S_1+$黄$)-$赤$=2(9+4)-2=24$

新たに正方形 S_4 をつくり，S_4 を求める。

定理4より，黄の1辺の4倍が正方形 S_4 の1辺であるから，

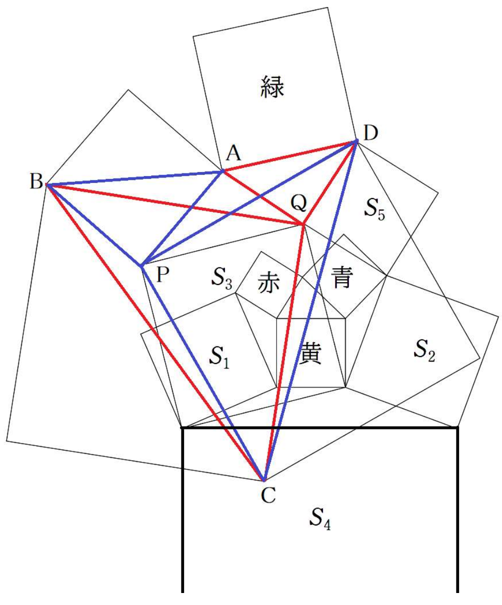
$S_4=4^2\times$黄$=64$

定理3より，$S_5=2(S_2+S_3)-S_4=2(12+24)-64=8$

定理1により四角形 ABCD について，△PAB，△PCD，△QBC は直角二等辺三角形であるから，△QDA も直角二等辺三角形となる。

AD$=\sqrt{2}$ DQ であるから，

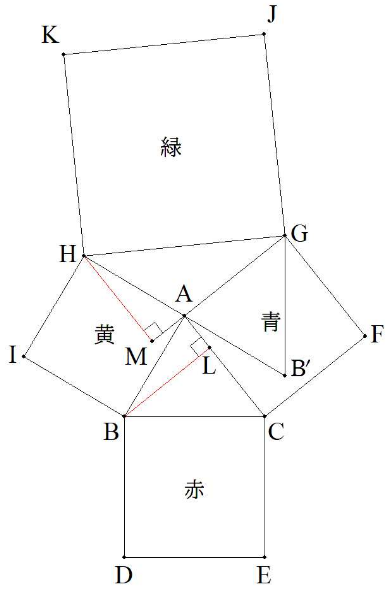
緑$=(\sqrt{2})^2S_5=2\times8=16$　答



補足

定理 3の中学生レベルの証明

証明　図のように記号を付ける。



△ABCをAを中心にACがAGに重なるように回転させたとき，

BがB′に移動したとする。（CはGに移動する。）

AH＝AB＝AB′で，∠HAG＋∠BAC＝180°より，

∠HAB′＝∠HAG＋∠B′AG＝∠HAG＋∠BAC＝180°より，

Aは線分HB′の中点となる。

したがって，△ABC＝△AB′G＝△AGHより，BL＝HM　…①

直角三角形ABLとAHMについて，

AB＝AHと①より，△ABL≡△AHMであるから，AL＝AM　…②

△BCLに三平方の定理を適用して，

赤＝BL^2+CL^2＝黄－AL^2+CL^2＝黄＋(CL＋AL)(CL－AL)

　＝黄＋AC(AC－2AL)＝黄＋青－2AC・AL　…③

△GHMに三平方の定理を適用して，

緑＝HM2＋MG2＝黄－AM2＋MG2＝黄＋(MG－AM)(MG＋AM)

　＝黄＋AG(AG＋2AM)＝黄＋青＋2AG・AM＝黄＋青＋2AC・AL　…④

（∵②とAG＝ACより）

よって，③，④を辺々加えると，赤＋緑＝2(黄＋青)　終

定理 4の証明に出てくる$(4S)^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$の中3レベルの証明

証明　△ABCの頂点AからBCに下した垂線の足をHとし，AH＝h，BH＝xとくと，HC＝$a-x$

△ABH，△ACHに三平方の定理を適用すると，$h^2=c^2-x^2$　…①，$h^2=b^2-(a-x)^2$　…②

①－②を辺々計算すると，$0=c^2-b^2+a^2-2ax$　$\therefore x=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}$

これを①に代入すると，$h^2=c^2-\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2=\dfrac{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{(2a)^2}$　…③

$S=\dfrac{1}{2}ah$であるから，

$(4S)^2=(2a^2)h^2$　これに③を代入すると，$(4S)^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$　終

（2020/6/14　ジョーカー）