第 390 回

xy 平面上で， x 座標， y 座標がともに整数であるような点 $(x,\ y)$ を格子点という。各格子点を中心として半径 r の円が描かれており，傾き $\dfrac{3}{4}$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。
注：東京大学　入試問題を改題しました。

解答　傾き $\dfrac{3}{4}$ の直線を， $3x-4y=p$ （ p は定数）$\cdots$①とおくと，①が格子点 $(m,\ n)$ を中心とする半径 r の円と共有点をもつのは， $r \geqq \dfrac{|3m-4n-p|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|3m-4n-p|}{5}$

ここで， $m=n$ とすれば， $3m-4n=-n$ だから， $m,\ n$ がすべての整数値をとるとき， $3m-4n$ はすべての整数値をとる。したがって， p に最も近い整数を N とすれば， $|3m-4n-p| \geqq |N-p|$ だから，①が少なくとも 1 つの円と共有点をもつためには， $r \geqq \dfrac{|N-p|}{5}$ $\cdots$②

また， $|N-p| \leqq \dfrac{1}{2}$ だから，②が任意の実数 に対して成り立つためには， $r \geqq \dfrac{\frac{1}{2}}{5}=\dfrac{1}{10}$

よって，求める r の最小値は $\dfrac{1}{10}$ $\cdots$（答）

（2020/9/1　ジョーカー）