第 391 回

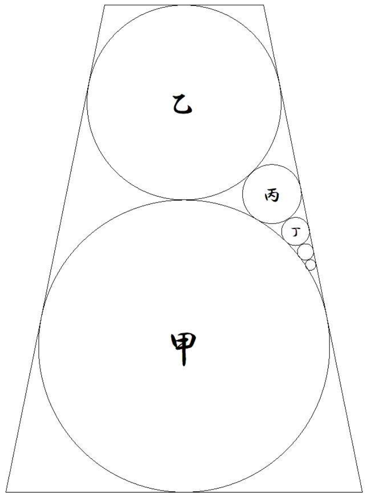
1．第一問

等脚台形に甲乙２円を入れる。その隙間に乙丙…（仮に黒で止める）を入れる。

甲径と黒径とを知って，台形内にある最も多い円の数を求めよ。

術文（答）求める円の個数＝$[\sqrt{甲径\div 黒径}]$

ただし，[　] はガウス記号



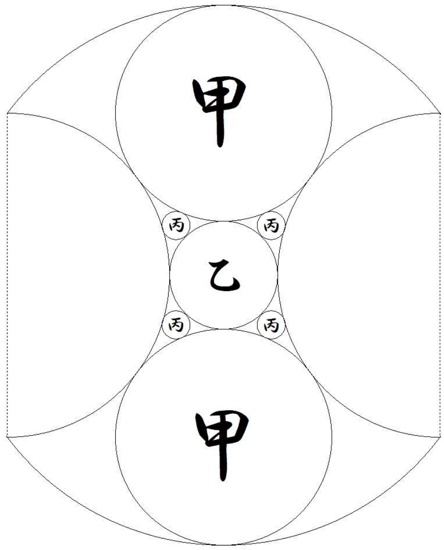
2．第二問

法馬（左右の等弧はすべての円に外接している）内に甲乙２円を描き，

その隙間に丙円を入れる。乙径を知って丙径を求めよ。

左右の弧は半円で，その直径は，２つの甲円の中心距離と等しい。

術文（答）　丙円径＝(6÷23)×（乙円径）



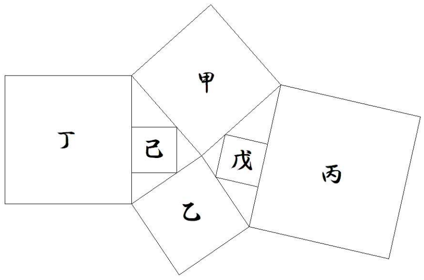
3．第三問

4 個の正方形，甲乙丙丁で 2 個の正方形戊己を囲む。

戊正方形の左の上下と己正方形の右の上下は甲乙正方形の一辺に接する。

丙丁戊の一辺をそれぞれ知って己辺を求めよ。

術文（答）　己＝丁÷{(丁÷丙)^2(丙－戊)÷戊＋1}



４．第四問

円と二等辺三角形が交わり

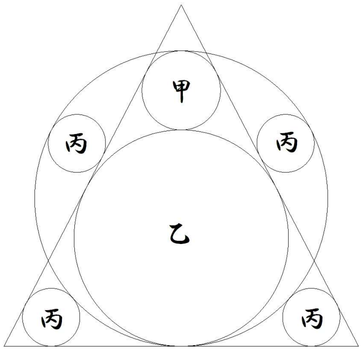
（円は底辺に接する）

その中へ甲乙の２円を入れる。

その間に丙円４個を入れる。

甲径を知って乙径を求めよ。

術文（答）　乙径＝$(\sqrt{3}+1)$ ×甲径

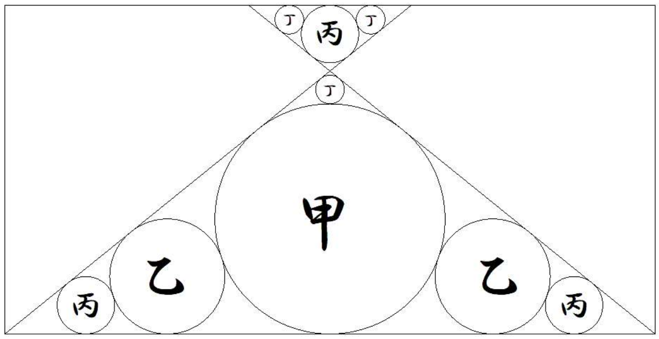


５．第五問

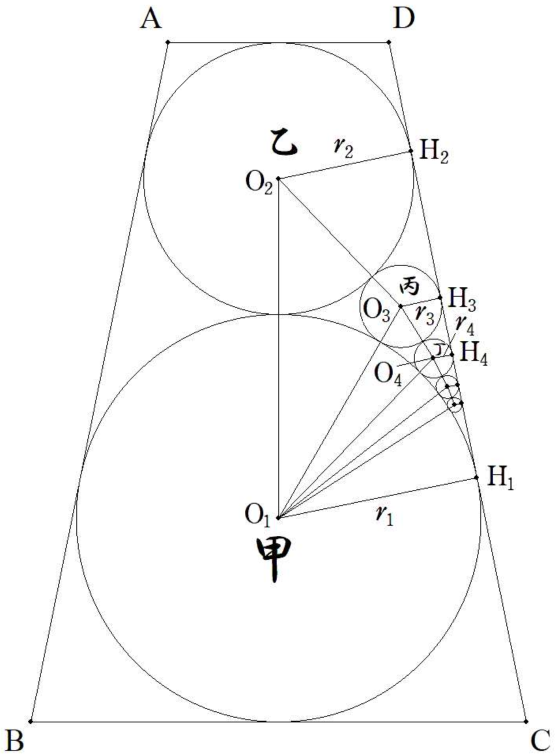
長方形内に２個の斜線をつくりその上下に甲乙丙丁の９個の円を入れる。

長方形の縦の長さを知って横の長さを求めよ。

術文（答）　横＝$\sqrt{3.92}$ ×縦



1．証明　円甲乙…黒の中心（半径）を順に，
$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，…，$O_n(r_n)$とおき，
それぞれの中心からCDに下した垂線の足を
順に，H_1，H_2，…，H_nとおく。



2円O_1，O_2について，三平方の定理により，
$H_1H_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$
同様に，$H_1H_3=2\sqrt{r_1r_3}$，$H_3H_2=2\sqrt{r_2r_3}$
$H_1H_2=H_1H_3+H_3H_2$であるから，
$2\sqrt{r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_3}+2\sqrt{r_2r_3}$
両辺を$2\sqrt{r_1r_2r_3}$で割ると，

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_2}}+\frac{1}{\sqrt{r_1}}\quad\cdots[1]$$

同様に，$H_1H_3=H_1H_4+H_4H_3$であるから，

$$\frac{1}{\sqrt{r_4}}=\frac{1}{\sqrt{r_3}}+\frac{1}{\sqrt{r_1}}\quad\cdots[2]$$

以下同様に，

$$\frac{1}{\sqrt{r_5}}=\frac{1}{\sqrt{r_4}}+\frac{1}{\sqrt{r_1}}\quad\cdots[3]$$

……………………………………

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt{r_1}}\quad\cdots[n-2]$$

[1]～[$n-2$]を辺々加えると，

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_2}}+\frac{n-2}{\sqrt{r_1}}\quad(n\geqq 3)\cdots①$$

両辺に$\sqrt{r_1}$を掛けると，$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_n}}=\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}+n-2$

ガウス記号をとると，$\left[\sqrt{\dfrac{r_1}{r_n}}\right]=n+\left[\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}-2\right]$

$\left[\sqrt{\dfrac{r_1}{r_n}}\right]=n$となるのは，$\left[\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}-2\right]=0$　*i.e.*　$2\leqq\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}<3$　…②のとき。

しかし，$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}$の値は，②とは限らない。

よって，甲径÷乙径の正の平方根が2以上3未満のときは，円の個数は，$[\sqrt{甲径÷黒径}]$で与えられる。　終

補足

(1)　甲径÷乙径の正の平方根が2未満のときは，円の個数は，$[\sqrt{甲径÷黒径}]-1$で与えられる。
　甲径÷乙径の正の平方根が3以上4未満のときは，円の個数は，$[\sqrt{甲径÷黒径}]+1$で与えられる。

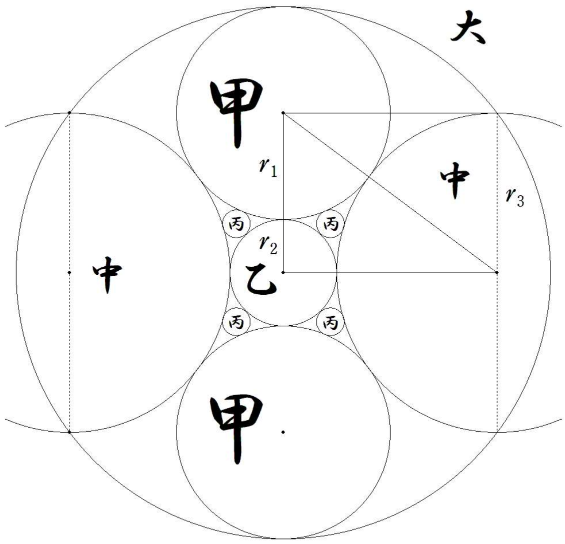
(2)　甲乙円の直径をそれぞれR，rとすると，等脚台形の上底：AD$=r\sqrt{\dfrac{r}{R}}$，下底：BC$=R\sqrt{\dfrac{R}{r}}$

(3)　AD$=\dfrac{16}{3}$，BC$=27$，AD∥BCである等脚台形ABCDに甲乙2円を入れる。

　その隙間に乙丙…を入れる。乙丙…円の面積の総和は，$\dfrac{27}{2}\pi^5-1312\pi$　（≒9.496）

（2020/10/3　ジョーカー）

２．証明　甲乙丙円を含む円を大円，左右の等弧を中円とする。



甲乙中円の半径をそれぞれ r_1， r_2， r_3 とおくと，

仮定より，$r_3 = r_1 + r_2$

甲乙中円の中心を頂点とする三角形は直角三角形であるから，

三平方の定理により，$(2r_1+r_2)^2=(r_1+r_2)^2+(r_1+2r_2)^2$

$r_1{}^2-r_1r_2-2r_2{}^2=0$　　$r_1>0$ より，$r_1=2r_2$

このとき，$r_3=3r_2$

丙円の半径を x とおくと，甲乙中円は互いに外接し，丙円はその３円に外接しているから，デカルトの円定理により

$$\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{2r_2}+\frac{1}{3r_2}+\frac{1}{x}\right)^2=2\left\{\frac{1}{r_2{}^2}+\frac{1}{(2r_2)^2}+\frac{1}{(3r_2)^2}+\frac{1}{x^2}\right\}$$

両辺に $(6r_2)^2$ を掛けると，$\left(11+\dfrac{6r_2}{x}\right)^2=2\left\{49+\left(\dfrac{6r_2}{x}\right)^2\right\}$

$$\left(\frac{6r_2}{x}\right)^2-22\left(\frac{6r_2}{x}\right)-23=0\qquad\left(\frac{6r_2}{x}-23\right)\left(\frac{6r_2}{x}+1\right)=0$$

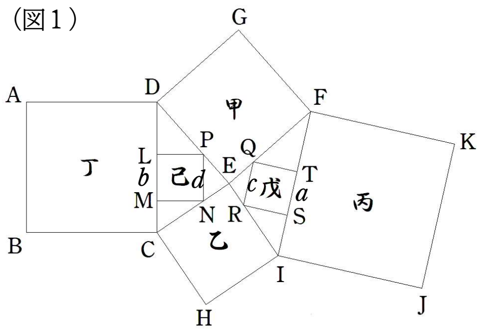
$\dfrac{6r_2}{x}>0$ より，$\dfrac{6r_2}{x}=23$　　$\therefore\ x=\dfrac{6}{23}r_2$

よって，丙円径＝(6÷23)×（乙円径）　終

(2020/10/4　ジョーカー)

３．証明　（図１）のように記号を付け，正方形丙丁戊己の１辺をそれぞれ a，b，c，d とおく。

（図１）



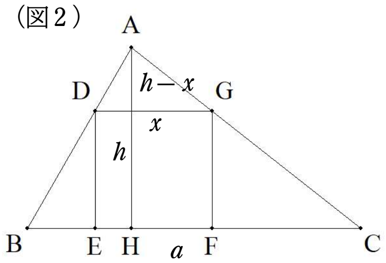
このとき，証明すべき式は $d=\dfrac{b}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\cdot\dfrac{a-c}{c}+1}$ となる。

まず，△EDCと△EIFについて，ED＝EF，EC＝EI，∠FEI＝180°－∠CED（補角）であるから，△EDC＝△EIFである。

この面積を S とおく。

（図２）で，△ABCと正方形DEFGについて，BC＝ a ，AからBCに下した垂線の足をH，AH＝ h とおくと，△ABC＝ $\dfrac{1}{2}ah$　…①

（図２）



正方形の１辺を x とすると，△ADG∽△ABCより，

底辺と高さを比べると，$x:a=(h-x):h$ より

$a(h-x)=hx$　　$\therefore\ h=\dfrac{ax}{a-x}$

これを①に代入すると，△ABC $=\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{ax}{a-x}=\dfrac{a^2x}{2(a-x)}$　公式

これを（図１）の△EIFに適用すると，$S=\dfrac{a^2c}{2(a-c)}$　…②

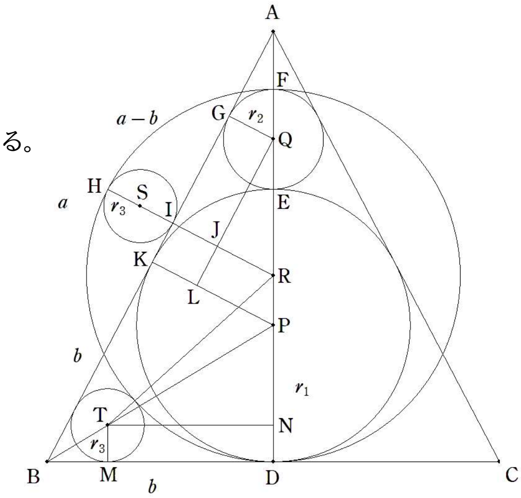
同様に，△EDCに公式を適用すると，$S=\dfrac{b^2d}{2(b-d)}$　…③

②，③より，$\dfrac{a^2c}{2(a-c)}=\dfrac{b^2d}{2(b-d)}$　　$a^2c(b-d)=b^2(a-c)d$　　$d=\dfrac{a^2bc}{b^2(a-c)+a^2c}=\dfrac{b}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\cdot\dfrac{a-c}{c}+1}$

よって，己辺は，　己＝丁÷{(丁÷丙)²(丙－戊)÷戊+1}　終

(2020/9/27　ジョーカー)

4．証明　右図のように記号を付け，AB＝a，BD＝b とおき，
甲乙円の中心（半径）をそれぞれ $Q(r_2)$，$P(r_1)$，
左上の丙円，左下の丙円の中心（半径）をそれぞれ $S(r_3)$，$T(r_3)$，
甲乙円を内接する大円の中心をRとすると，その半径は r_1+r_2 となる。
∵大円の直径＝FD＝$2r_2+2r_1=2(r_1+r_2)$ より。



AK＝AB－BK＝AB－BD＝$a-b$，
三平方の定理により，AD＝$\sqrt{a^2-b^2}$，
△ABDについて，$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$
BPは∠Bの二等分線であるから，

$$r_1=\mathrm{PD}=\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}=b\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\quad\cdots①$$

また，$\tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$

△QRJ∽△QPLで，QR＝FR－FQ＝$(r_1+r_2)-r_2=r_1$，JR＝HR－HI－IJ＝$(r_1+r_2)-2r_3-r_2=r_1-2r_3$，
QP＝r_1+r_2，LP＝r_1-r_2 であるから，

$$\frac{JR}{QR}=\frac{LP}{QP}\qquad\frac{r_1-2r_3}{r_1}=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}\qquad 1-\frac{2r_3}{r_1}=1-\frac{2r_2}{r_1+r_2}\qquad\therefore r_3(r_1+r_2)=r_1r_2\quad\cdots②$$

$$\mathrm{AG}=\frac{r_2}{\tan\dfrac{A}{2}}=\frac{r_2}{\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}r_2=\frac{a+b}{b^2}\cdot b\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,r_2=\frac{a+b}{b^2}r_1r_2\quad(\because①)$$

$$\mathrm{GK}=\mathrm{QL}=\sqrt{QP^2-LP^2}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$$

AG＋GK＝AK＝$a-b$ であるから，$\dfrac{a+b}{b^2}r_1r_2+2\sqrt{r_1r_2}=a-b\qquad(a+b)r_1r_2+2b^2\sqrt{r_1r_2}-b^2(a-b)=0$

2次方程式の解の公式により，$\sqrt{r_1r_2}>0$ に注意して，

$$\sqrt{r_1r_2}=\frac{-b^2+\sqrt{(b^2)^2-(a+b)\{-b^2(a-b)\}}}{a+b}=\frac{-b^2+ab}{a+b}=\frac{b(a-b)}{a+b}$$

両辺を平方して，$r_1r_2=\dfrac{b^2(a-b)^2}{(a+b)^2}$

$$\therefore r_2=\frac{b^2(a-b)^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{1}{r_1}=\frac{b^2(a-b)^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{1}{b\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}}=\frac{a-b}{a+b}\cdot b\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\frac{a-b}{a+b}r_1\quad\cdots③$$

$$\text{また，}\mathrm{BM}=\frac{r_3}{\tan\dfrac{B}{2}}=\frac{r_3}{\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}}=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\,r_3$$

$$\mathrm{MD}=\mathrm{TN}=\sqrt{RT^2-RN^2}=\sqrt{\{(r_1+r_2)+r_3\}^2-\{(r_1+r_2)^2-r_3\}^2}=2\sqrt{r_3(r_1+r_2)}=2\sqrt{r_1r_2}\quad(\because②)$$

$$=2\sqrt{r_1\cdot\frac{a-b}{a+b}r_1}\quad(\because③)\quad=2\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,r_1$$

BM＋MD＝BDより，$\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\,r_3+2\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\,r_1=b\qquad\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\,r_3=b-2\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\,r_1$

両辺に $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$ を掛けると，$r_3=b\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}-\dfrac{2(a-b)}{a+b}r_1=r_1-\dfrac{2(a-b)}{a+b}r_1=\dfrac{3b-a}{a+b}r_1\quad\cdots④$

③，④を②に代入すると，$\dfrac{3b-a}{a+b}r_1\left(r_1+\dfrac{a-b}{a+b}r_1\right)=r_1\cdot\dfrac{a-b}{a+b}r_1$　整理して，$3a^2-6ab-b^2=0$

$\dfrac{a}{b}>0$ より，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

これを③に代入すると，$r_2=\dfrac{\dfrac{a}{b}-1}{\dfrac{a}{b}+1}r_1=\dfrac{1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1}{1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1}r_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}r_1$

よって，$r_1=(\sqrt{3}+1)r_2$ となるから，乙径$=(\sqrt{3}+1)$ ×甲径が示された。 終

補足

(1) ⑤を④に代入すると，$r_3=(2-\sqrt{3})r_1=(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)r_2=(\sqrt{3}-1)r_2$ より，

丙径$=(\sqrt{3}-1)$ ×甲径が示せる。

(2) 甲円の半径を 1 とすると，乙丙円の半径は，それぞれ $\sqrt{3}+1$，$\sqrt{3}-1$ で，

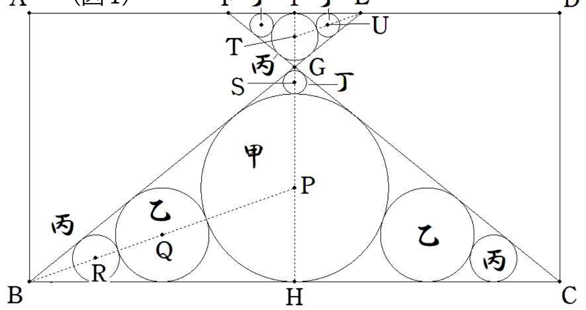
AB=AC= $a=\dfrac{\sqrt{426+246\sqrt{3}}}{3}$ （≒9.73），BC= $2b=2\sqrt{10+6\sqrt{3}}$ （≒4.52）となる。

（2020/10/13　ジョーカー）

5．証明　（図1）のように記号を付けると，$\sqrt{3.92}=\dfrac{7\sqrt{2}}{5}$

であるから，BC= $\dfrac{7\sqrt{2}}{5}$ AB を示す。

（図1）

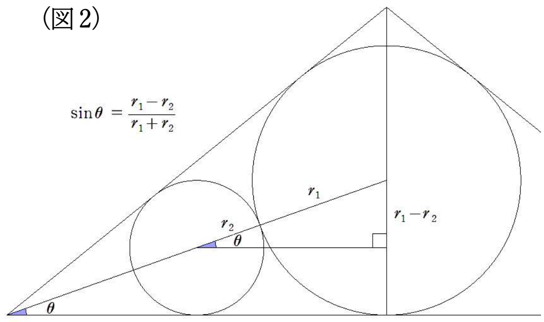


甲乙丙丁の各円の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3，r_4 とおく。

また，$\angle$PBH＝θ とおくと，$\angle$PGB＝$90^\circ-2\theta$ である。

△GBC 内の甲乙丙丁の各円について，（図2）

（図2）



$\sin\theta=\dfrac{r_1-r_2}{r_1+r_2}=\dfrac{r_2-r_3}{r_2+r_3}$ …①

$\sin(90^\circ-2\theta)=\dfrac{r_1-r_4}{r_1+r_4}$ …②

△GEF 内の丙乙円について，

$\sin\theta=\dfrac{r_3-r_4}{r_3+r_4}$ …③ である。

①，③より，$r_2=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_1$，$r_3=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_2$，

$r_4=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_3$ より，$\therefore r_4=\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^3 r_1$ …④

②より，$r_4=\dfrac{1-\sin(90^\circ-2\theta)}{1+\sin(90^\circ-2\theta)}r_1=\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}r_1=\dfrac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}r_1=r_1\tan^2\theta$ …⑤

④，⑤より，$\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^3=\tan^2\theta$ …⑥

ここで，$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくと，$0<t<1$ で，

$$\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\left(\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=\left(\frac{1-\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan\dfrac{\theta}{2}}\right)^2=\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2,$$

$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{2t}{(1+t)(1-t)}$ であるから，⑥は，$\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^6=\left\{\dfrac{2t}{(1+t)(1-t)}\right\}^2$

$0<t<1$ より，両辺の平方根をとって，$\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^3=\dfrac{2t}{(1+t)(1-t)}$

分母を払って，$(1-t)^4=2t(1+t)^2$　　$t^4-6t^3+2t^2-6t+1=0$　　$(t^2+1)(t^2-6t+1)=0$

$0<t<1$ より，$t=\tan\dfrac{\theta}{2}=3-2\sqrt{2}$

このとき，$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{2(3-2\sqrt{2})}{1-(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}{1-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$，

$\sin\theta=\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)}}=\dfrac{1}{3}$ である。

$\mathrm{BH}=\dfrac{r_1}{\tan\theta}=\dfrac{r_1}{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}\,r_1$，$\mathrm{GH}=\mathrm{BH}\tan 2\theta=2\sqrt{2}\,r_1\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{7}=\dfrac{16}{7}r_1$

r_3 を④のように，r_1 で表すと，$r_3=\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2 r_1=\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{1}{3}}\right)^2 r_1=\dfrac{1}{4}r_1$

$\triangle\mathrm{GBC}\backsim\triangle\mathrm{GEF}$で，相似比は，$r_1:r_3=1:\dfrac{1}{4}$ であるから，$\mathrm{GI}=\dfrac{1}{4}\mathrm{GH}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{16}{7}r_1=\dfrac{4}{7}r_1$

したがって，$\mathrm{IH}=\mathrm{GI}+\mathrm{GH}=\dfrac{4}{7}r_1+\dfrac{16}{7}r_1=\dfrac{20}{7}r_1$ であるから，

よって，$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathrm{IH}:2\mathrm{BH}=\dfrac{20}{7}r_1:2\cdot2\sqrt{2}\,r_1=5:7\sqrt{2}=1:\dfrac{7\sqrt{2}}{5}$

$\therefore\mathrm{BC}=\dfrac{7\sqrt{2}}{5}\mathrm{AB}$ を示すことができたから，横$=\sqrt{3.92}\times$縦が成り立つ。　㊫

(2020/9/28　ジョーカー)