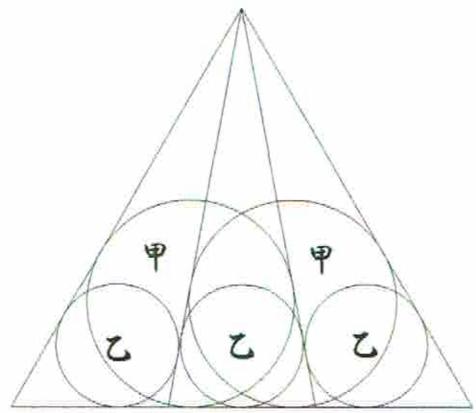
第 392 回

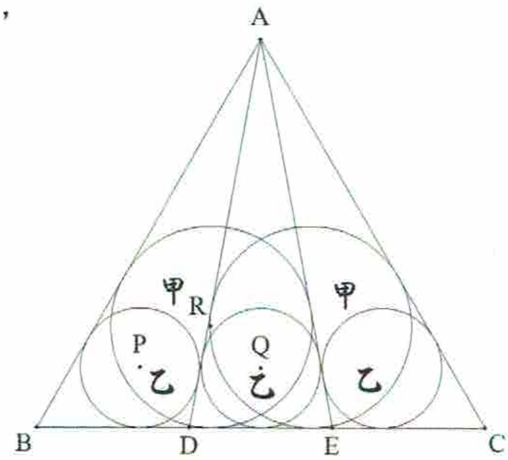
第六問

正三角形内に等しい２斜線を作り，甲乙５個の円を入れる
（甲円は三角形の１辺と斜線に接し，乙円はそれぞれの
小三角形に内接している）。甲径を知って乙径を求めよ。

術文（答）　乙径$=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}+1}\times$(甲径)



証明　図のように記号を付ける。



左の乙円の中心（半径）を$\mathrm{P}(r_2)$，中央の乙円の中心（半径）を$\mathrm{Q}(r_2)$，
左の甲円の中心（半径）を$\mathrm{R}(r_1)$とおく。r_1とr_2の比を求めるので，
正三角形の１辺を１としても一般性を失わない。

BD=CE= x とおくと，DE= $1-2x$

AD=AE= y とおく。

A から BC に下した垂線の長さを h とすると，

$\triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}xh$，$\triangle\mathrm{ADE}=\dfrac{1}{2}(1-2x)h$，$\triangle\mathrm{ABE}=\dfrac{1}{2}(1-x)h$

円 P について，$r_2=\dfrac{\triangle ABD}{\dfrac{AB+BD+DA}{2}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}xh}{\dfrac{1+x+y}{2}}$

$$=\frac{xh}{1+x+y}\quad\cdots①$$

円 Q について，$r_2=\dfrac{\triangle ADE}{\dfrac{AD+DE+EA}{2}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}(1-2x)h}{\dfrac{y+(1-2x)+y}{2}}=\dfrac{(1-2x)h}{1-2x+2y}\quad\cdots②$

円 R について，$r_1=\dfrac{\triangle ABE}{\dfrac{AB+BE+EA}{2}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}(1-x)h}{\dfrac{1+(1-x)+y}{2}}=\dfrac{(1-x)h}{2-x+y}\quad\cdots③$

①，②より，$\dfrac{xh}{1+x+y}=\dfrac{(1-2x)h}{1-2x+2y}$

分母を払って，y について解くと，$y=\dfrac{1-2x}{4x-1}\quad\cdots④$

△ABD と△ADE について，∠ADB+∠ADE=180° より，$\cos\angle ADB+\cos\angle ADE=0$

余弦定理により，$\dfrac{x^2+y^2-1}{2xy}+\dfrac{(1-2x)+y^2-y^2}{2(1-2x)y}=0$

整理すると，$y^2=x^2-x+1\quad\cdots⑤$

④を⑤に代入すると，$\left(\dfrac{1-2x}{4x-1}\right)^2=x^2-x+1$

分母を払って整理すると，$x(16x^3-24x^2+21x-5)=0$

$x>0$ より，$16x^3-24x^2+21x-5=0$ …⑤

2 次の項を消すために，$x=u+\dfrac{1}{2}$ を代入すると，$16u^3+9u+\dfrac{3}{2}=0$

両辺に 4 を掛け，$4u=v$ とおくと，$v^3+9v+6=0$

カルダノの公式（＊1）に代入して，$v=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$

$x=u+\dfrac{1}{2}=\dfrac{v}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{v+2}{4}=\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}+2}{4}$ …⑥

これを④に代入すると，$y=\dfrac{1-2x}{4x-1}=\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}}{4}$ …⑦ （＊2）

①，③より，$\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{(1-x)(1+x+y)}{x(2-x+y)}=\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}}$ （＊3）

$\therefore r_2=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}+1}r_1$ よって，乙径$=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}+1}\times$(甲径) 答

（＊1）カルダノの公式

3 次方程式 $x^3+px+q=0$ の解は，$x=\mathrm{A}+\mathrm{B}$，$\omega\mathrm{A}+\omega^2\mathrm{B}$，$\omega^2\mathrm{A}+\omega\mathrm{B}$ と表される。

ただし，$\mathrm{A}=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$，$\mathrm{B}=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$ （ω は 1 の虚数立方根）

はじめに，$x^3-3abx+a^3+b^3=(x+a+b)(x^2-ax-bx+a^2-ab+b^2)$

$=(x+a+b)(x+\omega a+\omega^2 b)(x+\omega^2 a+\omega b)=0$ とおくと，

$x=-a-b$，$-\omega a-\omega^2 b$，$-\omega^2 a-\omega b$ …①

3 次方程式 $x^3+px+q=0$ と $x^3-3abx+a^3+b^3=0$ の係数を比較すると，$p=-3ab$，$q=a^3+b^3$

$a^3+b^3=q$，$a^3b^3=-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ より，a^3，b^3 は $t^2-qt-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3=0$ の 2 解であるから，

$$t=\frac{q\pm\sqrt{(-q)^2-4\left\{-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3\right\}}}{2}=\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\quad \therefore a,\ b=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

ここで，$\mathrm{A}=-a=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$，$\mathrm{B}=-b=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$ とおき，①に代入すると所要の結果が得られる。

例 $x^3+9x+6=0$ の実数解を求めよ。

解答 カルダノの公式に，$p=9$，$q=6$ を代入すると，

$\mathrm{A}=\sqrt[3]{-\dfrac{6}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{6}{2}\right)^2+\left(\dfrac{9}{3}\right)^3}}=\sqrt[3]{3}$，$\mathrm{B}=\sqrt[3]{-\dfrac{6}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{6}{2}\right)^2+\left(\dfrac{9}{3}\right)^3}}=-\sqrt[3]{9}$ であるから，

$x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[3]{3}\omega-\sqrt[3]{9}\omega^2$，$\sqrt[3]{3}\omega^2-\sqrt[3]{9}\omega$ よって，実数解は，$x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$ 答

（＊2）

$\sqrt[3]{3}=t$ とおくと，$t^3=3$ である。

$x=\dfrac{2+t-t^2}{4}$ であるから，$y=\dfrac{1-2x}{4x-1}=\dfrac{1-2\cdot\dfrac{2+t-t^2}{4}}{4\cdot\dfrac{2+t-t^2}{4}-1}=\dfrac{t(t-1)}{2(-t^2+t+2)}$

ここで，$t^3-3=(-t^2+t+2)(-t-1)+2(t-1)=0$ より，$\dfrac{t-1}{-t^2+t+2}=\dfrac{t+1}{2}$ であるから，

$$y=\frac{t}{2}\cdot\frac{t+1}{2}=\frac{t^2+t}{4}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}}{4}$$ 終

（＊3）

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{(1-x)(1+x+y)}{x(2-x+y)}=\frac{\left(1-\dfrac{2+t-t^2}{4}\right)\left(1+\dfrac{2+t-t^2}{4}+\dfrac{t^2+t}{4}\right)}{\dfrac{2+t-t^2}{4}\left(2-\dfrac{2+t-t^2}{4}+\dfrac{t^2+t}{4}\right)}=\frac{(2-t+t^2)(3+t)}{(2+t-t^2)(3+t^2)}$$

$$=\frac{t^3+2t^2-t+6}{-t^4+t^3-t^2+3t+6}=\frac{2t^2-t+9}{-t^2+9}$$ （$\because t^3=3$ を代入）

ここで，$t^3-3=(-t^2+9)(-t)+3(3t-1)=0$ より，$\dfrac{1}{-t^2+9}=\dfrac{t}{3(3t-1)}$ であるから，

$$\frac{r_1}{r_2}=(2t^2-t+9)\cdot\frac{t}{3(3t-1)}=\frac{2t^3-t^2+9t}{3(3t-1)}=\frac{-t^2+9t+6}{3(3t-1)}$$ （$\because t^3=3$ を代入）

ここで，$t^3-3=(3t-1)\left(\dfrac{1}{3}t^2+\dfrac{1}{9}t+\dfrac{1}{27}\right)-\dfrac{80}{27}=0$ より，$\dfrac{1}{3t-1}=\dfrac{9t^2+3t+1}{80}$ であるから，

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{-t^2+9t+6}{3}\cdot\frac{9t^2+3t+1}{80}=\frac{-9t^4+78t^3+80t^2+27t+6}{240}=\frac{80t^2+240}{240}$$ （$\because t^3=3$ を代入）

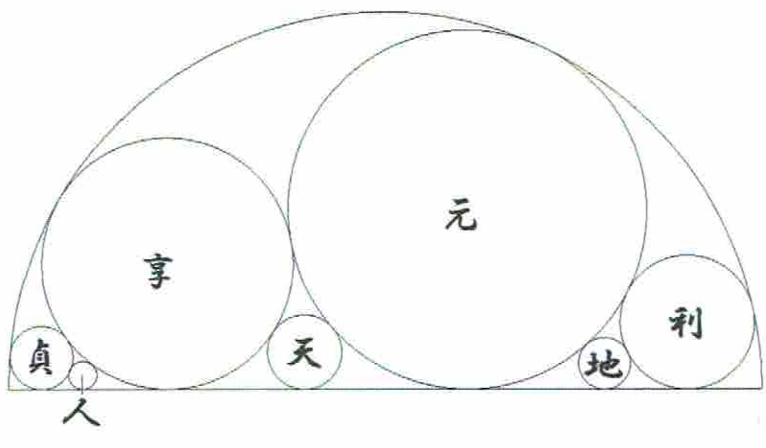
$$=\frac{t^2}{3}+1=\frac{\sqrt[3]{9}}{3}+1=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+1=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}}$$ 終

（2020/10/15　ジョーカー）

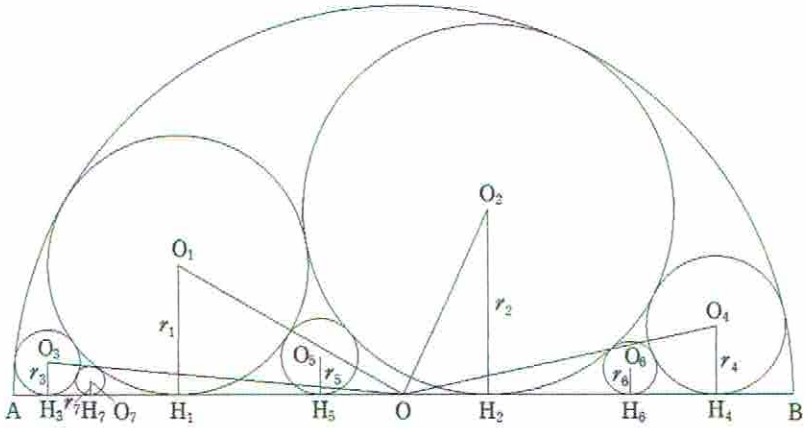
第八問

半円内に 4 個の円，貞享元利を入れる。
その隙に 3 円，天地人を入れる。
地径，人径を知って天径を求めよ。

術文（答）　$天=\dfrac{8\cdot 地\cdot 人}{2\sqrt{地\cdot 人}+地+人}$



証明　半円，享元貞利天地人円の中心（半径）をそれぞれ
$O(1)$，$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$，$O_4(r_4)$，$O_5(r_5)$，$O_6(r_6)$，$O_7(r_7)$
とする。
また，半円の直径 AB に
O_1，O_2，O_3，O_4，O_5，O_6，O_7
から下した垂線の足をそれぞれ
H_1，H_2，H_3，H_4，H_5，H_6，H_7
とする。
証明すべき式は，



$r_5=\dfrac{8r_6r_7}{2\sqrt{r_6r_7}+r_6+r_7}=\dfrac{8r_6r_7}{(\sqrt{r_6}+\sqrt{r_7})^2}$ から,

$\dfrac{1}{\sqrt{r_5}}=\dfrac{\sqrt{r_6}+\sqrt{r_7}}{2\sqrt{2}\sqrt{r_6r_7}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_6}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_7}}\right)$ …①と同値である。

円 O_1, O_2 について, 三平方の定理により, $H_1H_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$

同様に, 円 O_1, O_5 について, $H_1H_5=2\sqrt{r_1r_5}$, 円 O_2, O_5 について, $H_2H_5=2\sqrt{r_2r_5}$,

$H_1H_2=H_1H_5+H_2H_5$ であるから, $2\sqrt{r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_5}+2\sqrt{r_2r_5}$

両辺を $2\sqrt{r_1r_2r_5}$ で割ると, $\dfrac{1}{\sqrt{r_5}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt{r_5}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$ …②

同様に,

円 O_2, O_4, O_6 について, $\dfrac{1}{\sqrt{r_6}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_4}}$ …③,

円 O_1, O_3, O_7 について, $\dfrac{1}{\sqrt{r_7}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_3}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$ …④

この3式から, $\dfrac{1}{\sqrt{r_5}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_7}}-\dfrac{1}{\sqrt{r_3}}\right)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_6}}-\dfrac{1}{\sqrt{r_4}}\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_6}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_7}}\right)-\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_3}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_4}}\right)$ …⑤

$\triangle OO_1H_1$ において, 三平方の定理により, $OH_1=\sqrt{(1-r_1)^2-r_1{}^2}=\sqrt{1-2r_1}$

同様に, $\triangle OO_2H_2$ において, $OH_2=\sqrt{1-2r_2}$

$H_1H_2=2\sqrt{r_1r_2}$ であるから, $H_1H_2=OH_1+OH_2$ より, $2\sqrt{r_1r_2}=\sqrt{1-2r_1}+\sqrt{1-2r_2}$ …⑥

$\sqrt{1-2r_1}$ を移項して2乗すると, $(2\sqrt{r_1r_2}-\sqrt{1-2r_1})^2=1-2r_2$ ★

$4r_1r_2-4\sqrt{r_1r_2}\sqrt{1-2r_1}+1-2r_1=1-2r_2$ $\quad(1+2r_1)r_2-2\sqrt{r_1(1-2r_1)}\sqrt{r_2}-r_1=0$

$\sqrt{r_2}>0$ より,

$\sqrt{r_2}=\dfrac{\sqrt{r_1(1-2r_1)}+\sqrt{r_1(1-2r_1)+r_1(1+2r_1)}}{1+2r_1}=\dfrac{\sqrt{r_1(1-2r_1)}+\sqrt{2r_1}}{1+2r_1}=\dfrac{r_1}{\sqrt{2r_1}-\sqrt{r_1(1-2r_1)}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}=\dfrac{\sqrt{2r_1}-\sqrt{r_1(1-2r_1)}}{r_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_1}}-\dfrac{\sqrt{1-2r_1}}{\sqrt{r_1}}$ $\quad\therefore\ \dfrac{\sqrt{1-2r_1}}{\sqrt{r_1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_1}}-\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$ …⑦

⑥は r_1, r_2 について対称式であるから, 同様に, $\dfrac{\sqrt{1-2r_2}}{\sqrt{r_2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_2}}-\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$ …⑧

$OH_1+H_1H_3=OH_3$ で, $OH_1=\sqrt{1-2r_1}$, $H_1H_3=2\sqrt{r_1r_3}$, $OH_3=\sqrt{1-2r_3}$ であるから

$\sqrt{1-2r_1}+2\sqrt{r_1r_3}=\sqrt{1-2r_3}$

両辺を2乗すると, $(\sqrt{1-2r_1}+2\sqrt{r_1r_3})^2=1-2r_3$

これは★と似た形の方程式である。同様に 符号に注意して計算すると,

$\dfrac{1}{\sqrt{r_3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_1}}+\dfrac{\sqrt{1-2r_1}}{\sqrt{r_1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_1}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_1}}-\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$ $(\because⑦)$ $=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r_1}}-\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$ …⑨

同様に, $OH_2+H_2H_4=OH_4$ であるから, $\sqrt{1-2r_2}+2\sqrt{r_2r_4}=\sqrt{1-2r_4}$

$\dfrac{1}{\sqrt{r_4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_2}}+\dfrac{\sqrt{1-2r_2}}{\sqrt{r_2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_2}}-\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$ $(\because⑧)$ $=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r_2}}-\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$ …⑩

⑨, ⑩を⑤に代入すると,

$$\frac{1}{\sqrt{r_5}}=\left(\frac{1}{\sqrt{r_6}}+\frac{1}{\sqrt{r_7}}\right)-\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r_1}}-\frac{1}{\sqrt{r_2}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r_2}}-\frac{1}{\sqrt{r_1}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{r_6}}+\frac{1}{\sqrt{r_7}}\right)-(2\sqrt{2}-1)\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{r_6}}+\frac{1}{\sqrt{r_7}}\right)-(2\sqrt{2}-1)\frac{1}{\sqrt{r_5}}\quad(\because ②)$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{r_5}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{r_6}}+\frac{1}{\sqrt{r_7}}\right)$$

よって，①が示せたから，$天=\dfrac{8\cdot 地\cdot 人}{2\sqrt{地\cdot 人}+地+人}$ が成り立つ。 終

(2020/10/20　ジョーカー)

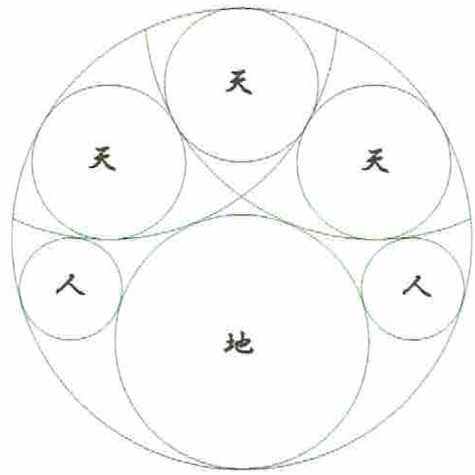
第九問

円に同じ径の等弧を書き，天地人円を入れる。

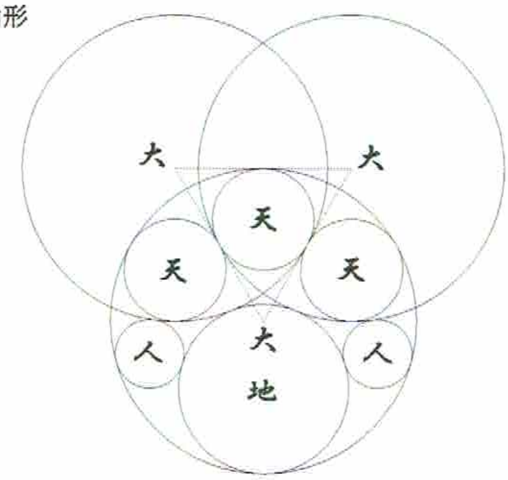
天円は等弧上で互いに外接している。

天径を知って人径を求めよ。

術文（答）　人径＝｛15－√（12.5）｝÷17×(天径)



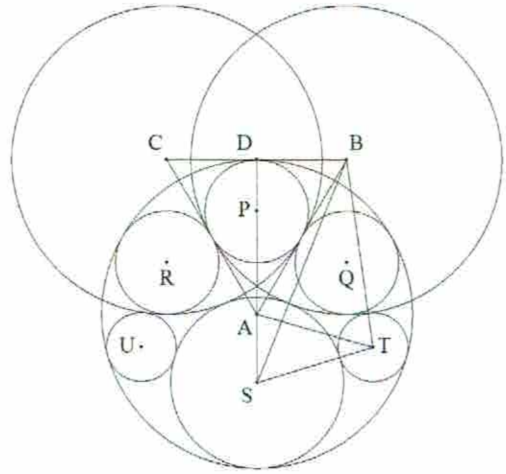
証明 天地人を含む円を大とし，同じ径の等弧をもつ大の中心が正三角形をなす場合を考える。



下図のように記号を付け，大天地人の半径をそれぞれ r, r_1, r_2, r_3 とする。

このとき，証明すべき式は，

$r_3=\dfrac{15-\sqrt{12.5}}{17}r_1=\dfrac{30-5\sqrt{2}}{34}r_1$ となる。



Pは△ABCの重心に一致するから，円Pの半径は，$r_1=\mathrm{PD}=\dfrac{1}{3}r$

△SBDにおいて，$\mathrm{BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r$，$\mathrm{DS}=2r-r_2$，$\mathrm{SB}=r+r_2$

であるから，三平方の定理により，

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\right)^2+(2r-r_2)^2=(r+r_2)^2$

$r>0$ より，$r_2=\dfrac{5}{9}r=\dfrac{5}{3}r_1$

$\angle\mathrm{BSD}=\alpha$, $\angle\mathrm{BST}=\beta$ とおく。

△SBDにおいて，$\mathrm{BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r=\sqrt{3}r_1$，$\mathrm{DS}=2r-r_2=\dfrac{13}{3}r_1$，

$\mathrm{SB}=r+r_2=\dfrac{14}{3}r_1$ であるから，$\cos\alpha=\dfrac{13}{14}$，$\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

△STBにおいて，$\mathrm{ST}=r_2+r_3=\dfrac{5}{3}r_1+r_3$，$\mathrm{TB}=r+r_3=3r_1+r_3$

であるから，余弦定理により，

$$\cos\beta=\frac{\left(\frac{14}{3}r_1\right)^2+\left(\frac{5}{3}r_1+r_3\right)^2-(3r_1+r_3)^2}{2\left(\frac{14}{3}r_1\right)\left(\frac{5}{3}r_1+r_3\right)}=\frac{35r_1-6r_3}{7(5r_1+3r_3)},\quad \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{135r_3(14r_1+3r_3)}}{7(5r_1+3r_3)}$$

△STAにおいて，$\mathrm{TA}=r-r_3=3r_1-r_3$，$\mathrm{AS}=r-r_2=\dfrac{4}{3}r_1$ であるから，余弦定理により，

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\left(\frac{4}{3}r_1\right)^2+\left(\frac{5}{3}r_1+r_3\right)^2-(3r_1-r_3)^2}{2\left(\frac{4}{3}r_1\right)\left(\frac{5}{3}r_1+r_3\right)}=\frac{-10r_1+21r_3}{2(5r_1+3r_3)}$$

これらを，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ に代入すると，

$$\frac{-10r_1+21r_3}{2(5r_1+3r_3)}=\frac{13}{14}\cdot\frac{35r_1-6r_3}{7(5r_1+3r_3)}-\frac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{3\sqrt{15r_3(14r_1+3r_3)}}{7(5r_1+3r_3)}$$

分母を払って移項し簡単にすると，$\sqrt{5r_3(14r_1+3r_3)}=35r_1-41r_3$

両辺を2乗し，移項すると，$27(25r_1{}^2-60r_1r_3+34r_3{}^2)=0$

$\dfrac{r_3}{r_1}=\dfrac{30\pm\sqrt{30^2-34\cdot 25}}{34}=\dfrac{30\pm 5\sqrt{2}}{34}$　$\dfrac{r_3}{r_1}<1$ より，$r_3=\dfrac{30-5\sqrt{2}}{34}r_1$ となるから，

よって，人径＝｛15−√（12.5）｝÷17×天径が示せた。 終

補足 地径＝$\dfrac{5}{3}$×天径，大径＝3×天径

(2020/10/21　ジョーカー)

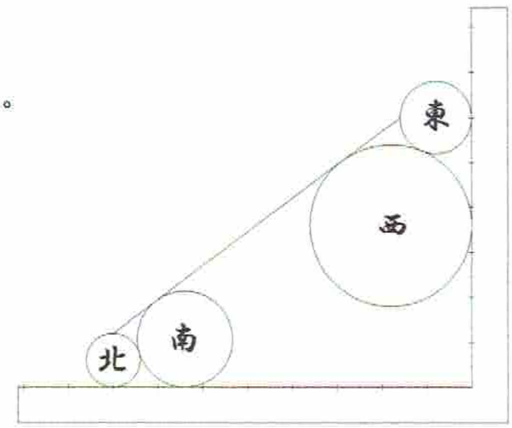
第十問

曲尺に東西南北の4個の円が接している。

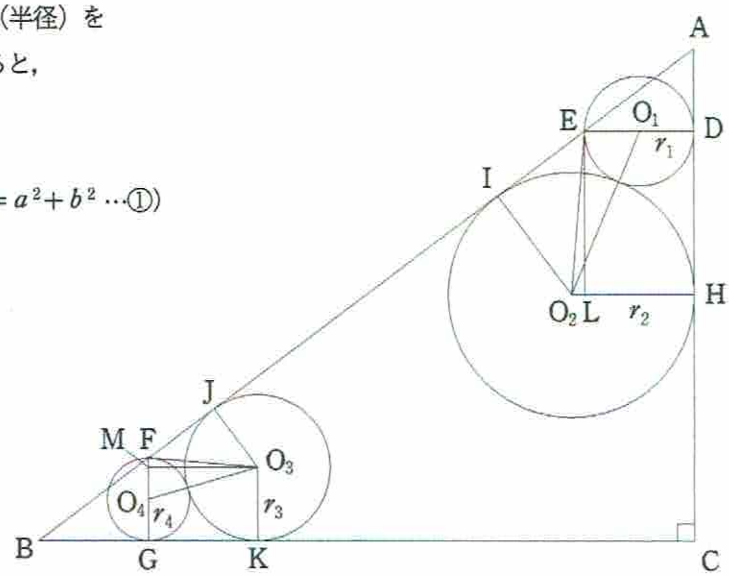
斜線を引く（東円の最も左の点から北円の最上の点を結ぶようにする）。

東西南の3円の径を知って北径を求めよ。

術文（答）　北径＝（西径×南径）÷（4東径）



証明　図のように記号を付け，東西南北円の中心（半径）をそれぞれ$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$，$O_4(r_4)$とすると，



証明すべき式は，$r_4=\dfrac{r_2r_3}{4r_1}$ である。

また，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$とおく。（$c^2=a^2+b^2$ …①）

三平方の定理により，

$EL=DH=\sqrt{(r_2+r_1)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$

$O_2L=r_2-2r_1$

$\triangle EO_2L$において，

$EO_2=\sqrt{(r_2-2r_1)^2+(2\sqrt{r_1r_2})^2}=\sqrt{4r_1{}^2+r_2{}^2}$

$\triangle EIO_2$において，

$EI=\sqrt{\left(\sqrt{4r_1{}^2+r_2{}^2}\right)^2-r_2{}^2}=2r_1$

同様に，$MO_3=GK=\sqrt{(r_3+r_4)^2-(r_3-r_4)^2}=2\sqrt{r_3r_4}$，$FM=2r_4-r_3$

$\triangle O_3FM$において，$FO_3=\sqrt{(2r_4-r_3)^2+(2\sqrt{r_3r_4})^2}=\sqrt{4r_4{}^2+r_3{}^2}$

$\triangle O_3JF$において，$JF=\sqrt{\left(\sqrt{4r_4{}^2+r_3{}^2}\right)^2-r_3{}^2}=2r_4$

$\triangle AED\backsim\triangle ABC$より，$AE=\dfrac{2c}{a}r_1$，$AD=\dfrac{2b}{a}r_1$

AH＝AIより，$\dfrac{2b}{a}r_1+2\sqrt{r_1r_2}=\dfrac{2c}{a}r_1+2r_1$　$\therefore\ \dfrac{r_2}{r_1}=\left(\dfrac{a+c-b}{a}\right)^2$ …②

同様に，$\triangle FBG\backsim\triangle ABC$より，$FB=\dfrac{2c}{b}r_4$，$BG=\dfrac{2a}{b}r_4$

BK＝BJより，$\dfrac{2a}{b}r_4+2\sqrt{r_3r_4}=\dfrac{2c}{b}r_4+2r_4$

$\therefore\ r_4=\left(\dfrac{b}{b+c-a}\right)^2r_3=\left\{\dfrac{b(a+c-b)}{c^2-(a-b)^2}\right\}^2r_3=\left\{\dfrac{b(a+c-b)}{2ab}\right\}^2r_3$（∵①）$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a+c-b}{a}\right)^2r_3=\dfrac{r_2r_3}{4r_1}$（∵②）

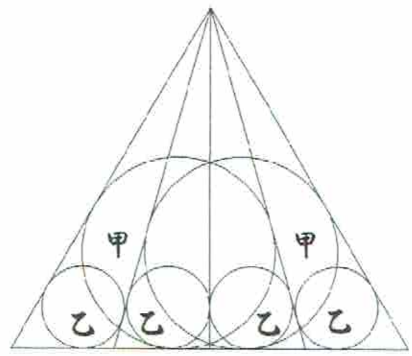
よって，北径＝（西径×南径）÷（4東径）　終

補足　$r_4=\dfrac{r_2r_3}{4r_1}\iff EO_2\perp MO_3\iff\triangle EIO_3\backsim\triangle O_3JF$

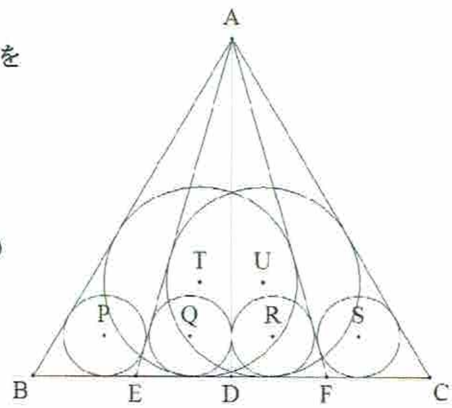
（2020/10/27　ジョーカー）

第 392 回第六問の類題

正三角形内に図のように甲円 2 個，乙円 4 個が配置されている。
（甲径）÷（乙径）の値を求めよ。



解答　図のように記号を付ける。



乙円の中心（半径）を P(r_1)，Q(r_1)，R(r_1)，S(r_1)，甲円の中心（半径）を T(r_2)，U(r_2) とおく。

比を求めるので，正三角形の 1 辺を 2 として考える。AD$=\sqrt{3}$

ED=DF$=x$ とおくと，BE=FC$=1-x$，

余弦定理により，$AE^2=2^2+(1-x)^2-2\cdot 2\cdot(1-x)\cos 60^\circ=x^2+3$　…①

円 P について，

$$r_1=\frac{\triangle ABE}{\dfrac{AB+BE+EA}{2}}=\frac{\dfrac{1}{2}(1-x)\sqrt{3}}{\dfrac{2+(1-x)+AE}{2}}=\frac{\sqrt{3}(1-x)}{3-x+AE}\quad\cdots②$$

円 Q について，

$$r_1=\frac{\triangle AED}{\dfrac{AE+ED+DA}{2}}=\frac{\dfrac{1}{2}x\sqrt{3}}{\dfrac{AE+x+\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x+AE}\quad\cdots③$$

円 T について，

$$r_2=\frac{\triangle ABF}{\dfrac{AB+BF+FA}{2}}=\frac{\dfrac{1}{2}(1+x)\sqrt{3}}{\dfrac{2+(1+x)+AE}{2}}=\frac{\sqrt{3}(1+x)}{3+x+AE}\quad\cdots④$$

②, ③より，$\dfrac{\sqrt{3}(1-x)}{3-x+AE}=\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x+AE}$　$\therefore AE=\dfrac{(2+\sqrt{3})x-\sqrt{3}}{1-2x}$

これを①に代入すると，$\left\{\dfrac{(2+\sqrt{3})x-\sqrt{3}}{1-2x}\right\}^2=x^2+3$

分母を払って，整理すると，$2x^4-2x^3-(2\sqrt{3}-3)x^2+(2\sqrt{3}-3)x=0$

因数分解すると，$x(x-1)\{2x^2-(2\sqrt{3}-3)\}=0$

$0<x<1$ であるから，$x=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}}$

①より，$AE^2=x^2+3=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}+3=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2}$

①, ③より，

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{(1+x)(3-x+AE)}{(1-x)(3+x+AE)}=\frac{(1+x)(3-x+AE)(3+x-AE)}{(1-x)\{(3+x)^2-AE^2\}}=\frac{(1+x)(3-x+AE)(3+x-AE)}{(1-x)\{(3+x)^2-AE^2\}}$$

$$=\frac{(1+x)\{9-(x-AE)^2\}}{(1-x)(9+6x+x^2-x^2-3)}=\frac{9-(x^2-2xAE+AE^2)}{6(1-x)}=\frac{9-(x^2-2xAE+x^2+3)}{6(1-x)}$$

$$=\frac{3-x^2+xAE}{3(1-x)}=\frac{3-\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}+\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2}}}{3(1-x)}=\frac{9-\sqrt{3}}{6(1-x)}=\frac{(9-\sqrt{3})(1+x)}{6(1-x^2)}$$

$$=\frac{(9-\sqrt{3})(1+x)}{6\left(1-\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}\right)}=\frac{(9-\sqrt{3})(1+x)}{3(5-2\sqrt{3})}=\frac{(9-\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})(1+x)}{3(25-12)}=\frac{(3+\sqrt{3})(1+x)}{3}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{2}}\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{3}+\frac{3+\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{2}}=\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{3\sqrt{3}}}{3}$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\quad(\fallingdotseq 2.33719)$$ 答

(2020/10/29　ジョーカー)