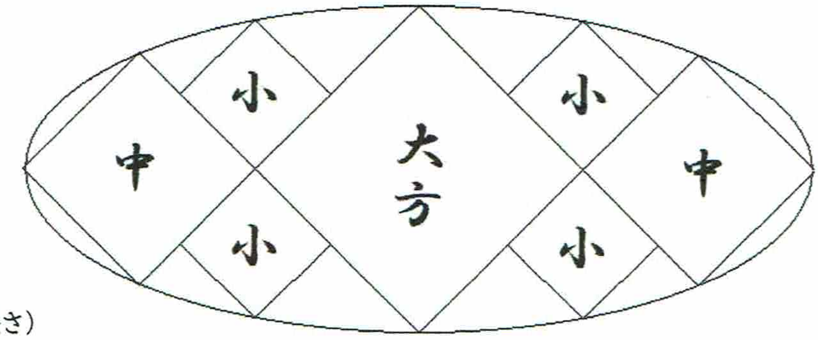
第 393 回

第１問題

楕円内に７個の正方形を入れる。
大正方形の一辺の長さを知って，
小正方形の一辺の長さを求めよ。



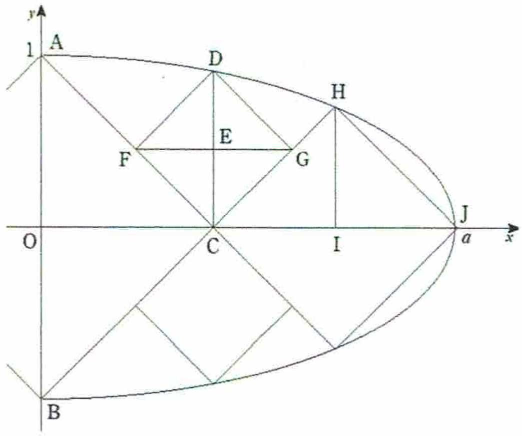
術文（答）

小正方形の一辺の長さ

$=\sqrt{\sqrt{0.5}-0.5}\times$（大正方形の一辺の長さ）

証明　大正方形の一辺の長さを p，小正方形の一辺の長さを q とおくと，$q=\sqrt{\sqrt{0.5}-0.5}\,p$ より，

$\dfrac{q}{p}=\sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$ を示せばよい。



座標平面で考える。

比を考えるので，楕円の短軸を２としても一般性は失わない。

楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ …①とおき，

図のように記号を付ける。（$a>1$）

OA＝OCより，C$(1,\ 0)$　$\therefore\ p=\sqrt{2}$

①で，$x=1$ とおくと，$y=\pm\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$　$\therefore$ D$\left(1,\ \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)$ であるから，CD$=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$

$\therefore\ q=\mathrm{CG}=\dfrac{CD}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}\,a}$

よって，$\dfrac{q}{p}=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{2a}$ …②

直線 BC の方程式は $y=x-1$ …③である。①と③の共有点のうち，$x>0$ となるのが H の x 座標である。

$\dfrac{x^2}{a^2}+(x-1)^2=1$ より，$x=\dfrac{2a^2}{a^2+1}$ であるから，OI$=\dfrac{2a^2}{a^2+1}$

$\mathrm{IJ}=\mathrm{CI}=\mathrm{OI}-\mathrm{OC}=\dfrac{2a^2}{a^2+1}-1=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

OI＋IJ＝OJであるから，$\dfrac{2a^2}{a^2+1}+\dfrac{a^2-1}{a^2+1}=a$　$a^3-3a^2+a+1=0$　$(a-1)(a^2-2a-1)=0$

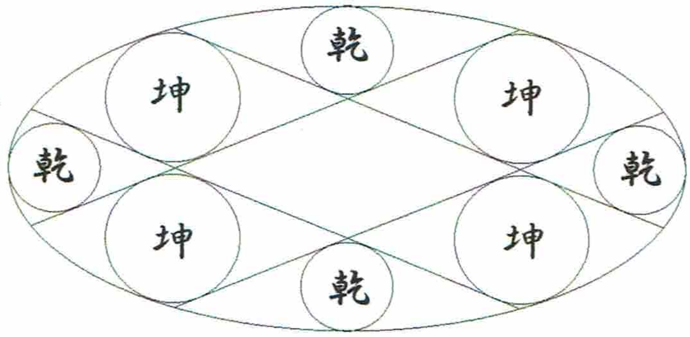
$a>1$ より，$a=1+\sqrt{2}$

これを②に代入すると，$\dfrac{q}{p}=\dfrac{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2-1}}{2(1+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$

よって，小正方形の一辺の長さ$=\sqrt{\sqrt{0.5}-0.5}\times$（大正方形の一辺の長さ）が証明された。　終

第2問題

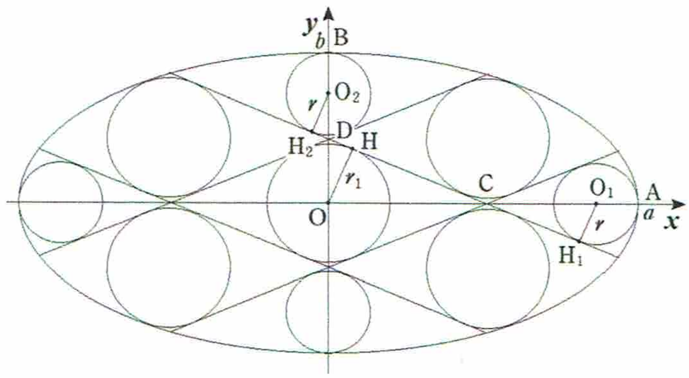
楕円の内に平行な弦を作り図のように，楕円と平行な弦に接する4個の乾円と4個の坤円を入れる。このとき，楕円の長径と短径を知って，乾円が最小となるときの坤円の直径を求めよ。



術文（答）

$$坤円径=\frac{長径-\dfrac{短径^2}{長径}}{\sqrt{\left(\dfrac{長径}{短径}+1\right)^2+1}}-\frac{短径^2}{長径}$$

証明　座標平面で考える。図のように記号を付ける。



楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の長軸の頂点Aで内接する最大円の半径 r は，$r=\dfrac{b^2}{a}$　(*1)

楕円の短軸の頂点Bで内接する最大円の半径 r' は，

$r'=\dfrac{a^2}{b}$　(*1)

$a>b$ より，$r<r'$ であるから，頂点A，Bで半径 $r=\dfrac{b^2}{a}$ の円を内接させるとき，乾円の半径は最小となる。

1個の坤円の中心を原点に移動すると，CDを1辺とするひし形に内接する。坤円の半径を r_1 とする。

$O_1(a-r,\ 0)$，$O_2(0,\ b-r)$ から直線CDに下した垂線の足をそれぞれ H_1，H_2，OからCDに下した垂線の足をHとする。ここで，$a-r=a-\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{(a+b)(a-b)}{a}$，$b-r=b-\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{b(a-b)}{a}$　…①である。

$\triangle COH\backsim\triangle CO_1H_1$ より，$\dfrac{r_1}{CO}=\dfrac{r}{CO_1}$　$\therefore CO_1=\dfrac{r}{r_1}CO$

これを，$OC+CO_1=a-r$ に代入すると，$OC+\dfrac{r}{r_1}CO=a-r$　$\therefore OC=\dfrac{r_1(a-r)}{r+r_1}$

同様に，$\triangle DOH\backsim\triangle DO_2H_2$ より，$OD=\dfrac{r_1(b-r)}{r+r_1}$ となるから，

$$\frac{OD}{OC}=\frac{b-r}{a-r}=\frac{\dfrac{b(a-b)}{a}}{\dfrac{(a+b)(a-b)}{a}}\ (\because①)\ =\frac{b}{a+b}$$

直線CDの方程式は，$y=-\dfrac{b}{a+b}x+k$ と表される。$(k>0)$

$\dfrac{b}{a+b}x+y-k=0$　…②

点 $O_1(a-r,\ 0)$ と直線②の距離は r であるから，$\dfrac{\left|\dfrac{b}{a+b}(a-r)-k\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^2+1}}=r$

ここで，点 $O_1(a-r,\ 0)$ は直線②の上側にあるから，$\dfrac{b}{a+b}(a-r)-k>0$ である。

$$\therefore k=\frac{b}{a+b}(a-r)-r\sqrt{\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+1}$$

また，原点と直線②の距離は r_1 であるから，

$$r_1=\frac{|-k|}{\sqrt{\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+1}}=\frac{k}{\sqrt{\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+1}}=\frac{\frac{b}{a+b}(a-r)-r\sqrt{\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+1}}{\sqrt{\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+1}}=\frac{\frac{b}{a+b}(a-r)}{\sqrt{\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+1}}-r$$

$$=\frac{a-r}{\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{b}\right)^2}}-r=\frac{\frac{(a+b)(a-b)}{a}}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}+1\right)^2+1}}-\frac{b^2}{a}=\frac{a-\frac{b^2}{a}}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}+1\right)^2+1}}-\frac{b^2}{a}$$

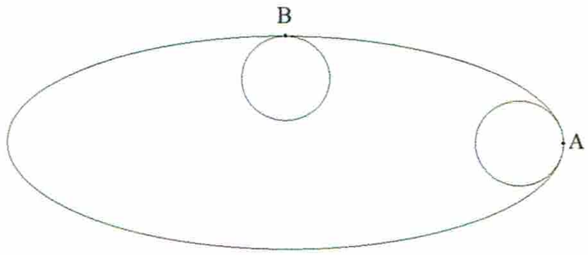
よって，両辺に 2 を掛けると，$2r_1=\dfrac{2a-\frac{(2b)^2}{2a}}{\sqrt{\left(\frac{2a}{2b}+1\right)^2+1}}-\dfrac{(2b)^2}{2a}$ となるから，

$$\text{坤円径}=\frac{\text{長径}-\frac{\text{短径}^2}{\text{長径}}}{\sqrt{\left(\frac{\text{長径}}{\text{短径}}+1\right)^2+1}}-\frac{\text{短径}^2}{\text{長径}}$$ が示された。 終

(*1)

長軸 $2a$，短軸 $2b$ である楕円の長軸の頂点 A で内接する最大円の半径 r について，$r \leqq \dfrac{b^2}{a}$ である。

また，短軸の頂点Bで内接する最大円の半径 r' について，$r' \leqq \dfrac{a^2}{b}$ である。



証明　楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （$a>b$）　…①

とおく。

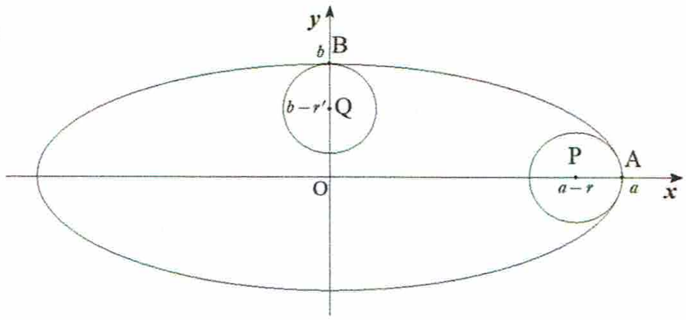
長軸の頂点 A で内接する円の中心（半径）を $P(r)$，

短軸の頂点 B で内接する円の中心（半径）を $Q(r')$

とおくと，円 P，Q の方程式はそれぞれ，

$\{x-(a-r)\}^2+y^2=r^2$　…②，

$x^2+\{y-(b-r')\}^2=r'^2$　…③となる。



②より，$x^2-2(a-r)x+(a-r)^2+y^2-r^2=0$　$\therefore x^2+y^2+a^2-2ar=2(a-r)x$

両辺を 2 乗すると，$(x^2+y^2+a^2-2ar)^2=4(a-r)^2x^2$　…②′

①より得られる $x^2=\dfrac{a^2(b^2-y^2)}{b^2}$ を②′に代入すると，$\left\{\dfrac{a^2(b^2-y^2)}{b^2}+y^2+a^2-2ar\right\}^2=4(a-r)^2\cdot\dfrac{a^2(b^2-y^2)}{b^2}$

両辺に b^4 を掛けて，整理すると，$y^2\{(a^2-b^2)^2y^2+2ab^2(a-r)(b^2-ar)\}=0$

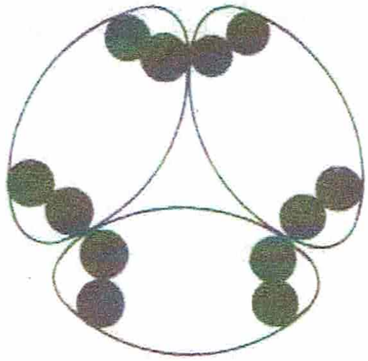
中カッコの中の y についての 2 次方程式が，虚数解をもたないと，円と楕円は接点以外に共有点をもつから不適である。

$(a^2-b^2)^2>0$，$2ab^2(a-r)>0$ であるから，虚数解をもつためには，$b^2-ar \geqq 0$　$\therefore r \leqq \dfrac{b^2}{a}$

この結果で，a と b，r と r' を入れ換えると，$r' \leqq \dfrac{a^2}{b}$ となり，これが短軸の頂点Ｂで内接する最大円の半径 r' の条件となる。 (終)

第３問題

互いに接する３個の相等しい楕円がある。これ等の楕円内に12個の相等しい円（これらの２円は互いに外接して２つの楕円の接点で外接している）を作る。楕円の長径及び短径の長さを知って円の直径を求めよ。



術文（答）

$(4-\sqrt{12})$ ×短径＝極とすると，

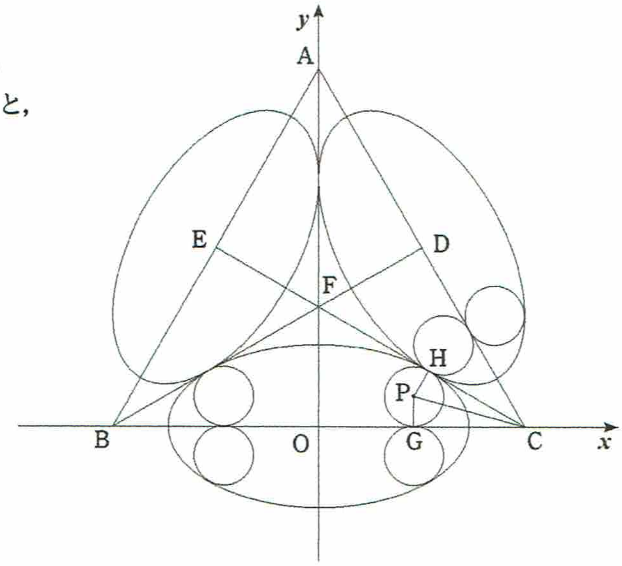
円径＝ $\sqrt{1/\left\{\dfrac{1}{3}(長径 \div 短径)^2+1\right\}}$ 極

(証明) 与えられた図を座標平面上において考える。

下側の楕円の中心を原点，長径を x 軸，短径を y 軸上におく。

３個の楕円の長径の延長の交点を図のようにＡ，Ｂ，Ｃとすると，題意より△ABCは正三角形となり，AO，BD，CEは角の二等分線であるからＦは内心となる。

∠FCO＝30°であるから，∠PCH＝15°である。



次に中心がＯである楕円の方程式を，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　…①

とおくと，長径 $2a$，短径 $2b$ となる。

$(4-\sqrt{12})$ ×短径＝極とすると，

円径＝ $\sqrt{1/\left\{\dfrac{1}{3}(長径 \div 短径)^2+1\right\}}$ 極を文字で表す。

円Ｐの半径を r とすると，円径（直径）は，

$2r=\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2a}{2b}\right)^2+1}}\cdot(4-\sqrt{12})\times 2b=\dfrac{4(2\sqrt{3}-3)b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}$ より，$r=\dfrac{2(2\sqrt{3}-3)b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}$　…② となるから，これを証明する。

$F(0,\ f)$ とおくと，$C(\sqrt{3}f,\ 0)$ であるから，直線FCの方程式は，$\dfrac{x}{\sqrt{3}f}+\dfrac{y}{f}=1$　$\therefore x=\sqrt{3}(f-y)$　…③

③を①に代入すると，$\dfrac{\{\sqrt{3}(f-y)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

分母を払って整理すると，$(a^2+3b^2)y^2-6b^2fy+b^2(3f^2-a^2)=0$　…④

この y についての２次方程式の判別式を D とすると，接するから $D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=\{-3b^2f\}^2-(a^2+3b^2)\cdot b^2(3f^2-a^2)=a^2b^2(a^2+3b^2-3f^2)=0$ より，$f^2=\dfrac{a^2+3b^2}{3}$

$f>0$ より，$f=\sqrt{\dfrac{a^2+3b^2}{3}}$　$\therefore C\left(\sqrt{a^2+3b^2},\ 0\right)$

このとき，④より，$y=\dfrac{3b^2f}{a^2+3b^2}=\dfrac{\sqrt{3}\,b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}$

③より，$x=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}$　$\therefore \mathrm{H}\left(\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+3b^2}},\ \dfrac{\sqrt{3}\,b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}\right)$

$$\mathrm{CH}=\sqrt{\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}-\sqrt{a^2+3b^2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}\,b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}\,b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}$$

△PCH は直角三角形で，$\tan 15^\circ=\dfrac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=2-\sqrt{3}$ あるから，

$$r=\mathrm{PH}=\mathrm{CH}\tan 15^\circ=\frac{2\sqrt{3}\,b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}\cdot(2-\sqrt{3})=\frac{2(2\sqrt{3}-3)b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}$$

よって，②が得られたから，術文は証明された。 終

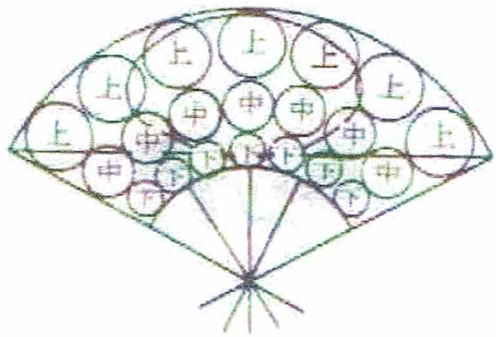
第 4 問題

与えられた扇形の両端を結ぶ線分を引き，その間に最大な楕円（長径の長さは短径の長さの 2 倍である）を内接せしめ，その楕円の短径の端で扇形が接するように楕円を描く。

扇形内に上中下の 3 種の相等しい個数の円を入れる。

楕円の長径，上円の直径の長さを知って，扇形の面積を求めよ。

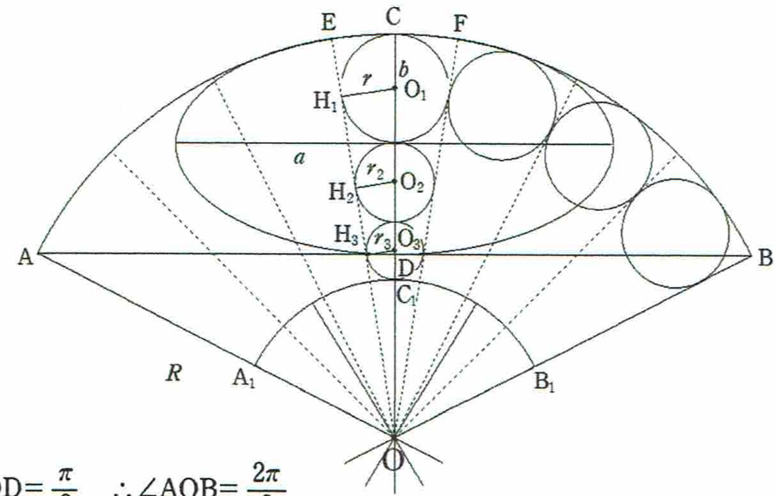
注　最多側円とは，円が楕円の短径の端で接する場合と考える。すなわち楕円の短径の端で最小半径の円が外接する場合で，この円が扇形の弧となっている。



術文（答）

楕円の長径 $2a$，上円の直径 $2r$，扇面の面積を S とすると，$S=\left[(2a)^2-\left\{\dfrac{(2a-2r)^3}{(2a)^2}\right\}^2\right]\cdot\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{4}{3}$

証明　図のように記号を付ける。



楕円の長径を $2a$，短径を $2b$ とすると，

仮定より，$b=\dfrac{1}{2}a$

また，扇形 OAB の半径を R とすると，

楕円と扇形 OAB は図の C で接するから，

$R=\dfrac{a^2}{b}$ (*2) $=\dfrac{a^2}{\frac{1}{2}a}=2a$

このとき，$\mathrm{OD}=\mathrm{OC}-\mathrm{CD}=2a-a=a$

直角三角形 AOD において，

$\cos\angle AOD=\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}$ より，$\angle\mathrm{AOD}=\dfrac{\pi}{3}$　$\therefore\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2\pi}{3}$

次に，上中下の円の半径をそれぞれ r，r_2，r_3 とおき，$\dfrac{\angle AOB}{n}=\angle\mathrm{EOF}=2\theta$ とおく。

$\triangle\mathrm{OO_1H_1}\backsim\triangle\mathrm{OO_2H_2}\backsim\triangle\mathrm{OO_3H_3}$ であるから，$\sin\theta=\dfrac{r}{2a-r}=\dfrac{r-r_2}{r+r_2}=\dfrac{r_2-r_3}{r_2+r_3}$ より，

$r_2=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r$, $r_3=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_2=\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2 r$,

$\sin\theta=\dfrac{r}{2a-r}$ であるから, $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{1-\dfrac{r}{2a-r}}{1+\dfrac{r}{2a-r}}=\dfrac{a-r}{a}$ より, $r_2=\dfrac{a-r}{a}r$, $r_3=\left(\dfrac{a-r}{a}\right)^2 r$

$OC_1=OC-OC_1=2a-2(r+r_2+r_3)=2a-2\left\{r+\dfrac{a-r}{a}r+\left(\dfrac{a-r}{a}\right)^2 r\right\}=\dfrac{2(a-r)^3}{a^2}$

$S=\dfrac{1}{2}OC^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{1}{2}OC_1{}^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}(2a)^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{2(a-r)^3}{a^2}\right\}^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}\left\{(2a)^2-\dfrac{(2a-2r)^3}{(2a)^2}\right\}^2$

$=\left[(2a)^2-\left\{\dfrac{(2a-2r)^3}{(2a)^2}\right\}^2\right]\cdot\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{4}{3}$ 終

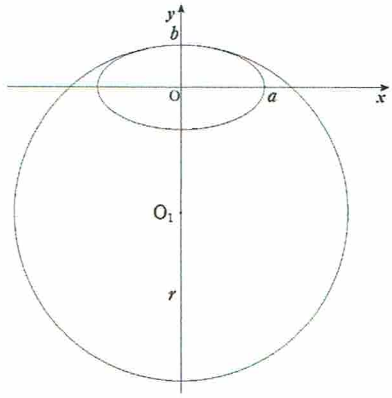
補足 $S=\dfrac{4\pi}{3}\left\{1-\left(1-\dfrac{r}{a}\right)^6\right\}$ とも変形できる。

(*2)

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と半径 r の円 O_1 が,

図のように点 $(0,\ b)$ で接するとき,

r を a, b を用いて表せ。



解答 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ …①

$O_1(0,\ b-r)$ であるから, 円の方程式は, $x^2+\{y-(b-r)\}^2=r^2$ …②

②より, $x^2=r^2-\{y-(b-r)\}^2$

これを①に代入すると, $\dfrac{r^2-\{y-(b-r)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

分母を払うと, $b^2r^2-b^2\{y-(b-r)\}^2+a^2y^2=a^2b^2$

整理すると, $(a^2-b^2)y^2+2b^2(b-r)y+b^2r^2-a^2b^2-b^2(b-r)^2=0$

y についての2次方程式の判別式を D とおくと, 接するから, D=0 である。

$\dfrac{D}{4}=b^4(b-r)^2-(a^2-b^2)b^2\{r^2-a^2-(b-r)^2\}=b^2[b^2(b-r)^2-(a^2-b^2)\{r^2-a^2-(b-r)^2\}]$

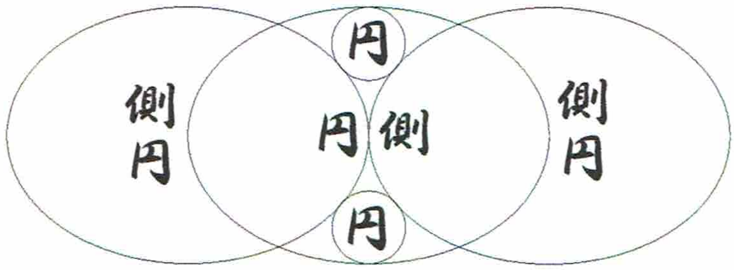
$=b^2(-a^2r^2+a^4+a^2b^2-2a^2br+a^2r^2+b^2r^2-a^2b^2)=b^2(a^4-2a^2br+b^2r^2)=b^2(a^2-br)^2=0$ より,

$a^2-br=0$

よって, $r=\dfrac{a^2}{b}$ 答

第5問題

相等しい3個の楕円に接するように相等しい2個の円を描く。
楕円の短径と円の直径を与えて楕円の長径を求めよ。



術文（答）

短径−円径＝天(p)，4(天−円径)＝地(q)，(地＋14円径)(2天)−(円径)^2＝人(t) とすると，

$$長径(2a)=\sqrt{\frac{(8天)(短径)}{人-\sqrt{人^2-地^3天}}}(円径)=\sqrt{\frac{8p(2b)}{t-\sqrt{t^2-q^3p}}}(2r)$$

$\boxed{証明}$ 短径を $2b$，円の直径を $2r$ で表すと，術文の式は，$p=2b-2r=2(b-r)$，$q=4\{2(b-r)-2r\}=8(b-2r)$，

$t=\{8(b-2r)+14\cdot 2r\}\cdot 2\cdot 2(b-r)-(2r)^2=4(8b^2+4br-13r^2)$ であるから，

$t^2-q^3p=\{4(8b^2+4br-13r^2)\}^2-\{8(b-2r)\}^3\cdot 2(p-r)=16r(8b-7r)^3$ となり，

$$長径(2a)=\sqrt{\frac{8p(2b)}{t-\sqrt{t^2-q^3p}}}(2r)=\sqrt{\frac{8\cdot 2(b-r)(2b)}{4(8b^2+4br-13r^2)-4(8b-7r)\sqrt{r(8b-7r)}}}(2r)$$

$$=\sqrt{\frac{8b(b-r)}{8b^2+4br-13r^2-(8b-7r)\sqrt{r(8b-7r)}}}(2r)$$ …①となるから，この式を導くことを目標にする。

座標平面で考える。

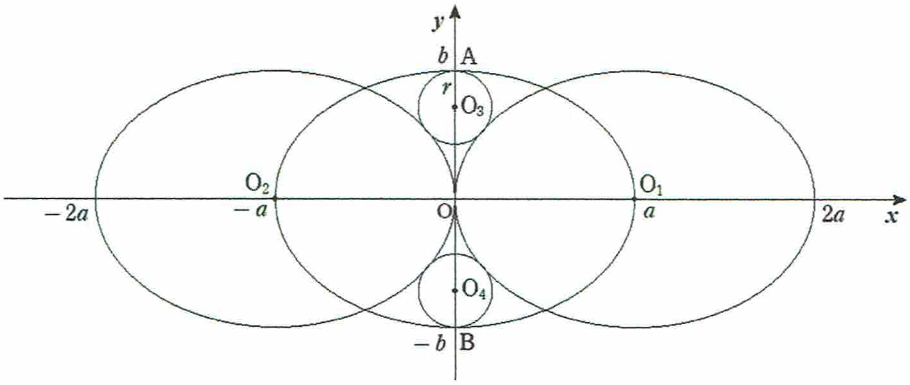
図のように記号を付ける。

中央の楕円の方程式を

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすると，

右側の楕円は

$\dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ …②となる。



円 O_3 の半径を r とすると，

$O_3(0,\ b-r)$ であるから，上側の円の方程式は，$x^2+(y-b+r)^2=r^2$ …③とかける。

②より，$y^2=\dfrac{b^2x(2a-x)}{a^2}$ …④

③より，$x^2+y^2+(b-r)^2-r^2=2(b-r)y$

両辺を2乗すると，$\{x^2+y^2+(b-r)^2-r^2\}^2=4(b-r)^2y^2$

これに④を代入すると，$\left\{x^2+\dfrac{b^2x(2a-x)}{a^2}+b^2-2br\right\}^2=4(b-r)^2\cdot\dfrac{b^2x(2a-x)}{a^2}$

両辺に a^4 を掛けると，$\{(a^2-b^2)x^2+2a^2bx+a^2b(b-2r)\}^2=4a^2b^2(b-r)^2x(2a-x)$

展開して整理すると，

$(a^2-b^2)^2x^4+4ab^2(a^2-b^2)x^3+2a^2(a^2b^2+3b^4-2a^2br-2b^3r+2b^2r^2)x^2-4a^3b^2(b^2-2br+2r^2)x$

$+a^4b^2(b-2r)^2=0$ …⑤

②と③が接するとき，⑤が重解をもつので，重解をもつ条件を考える。

⑤の両辺に $\dfrac{(a^2-b^2)^2}{a^4}$ を掛け，$\dfrac{a^2-b^2}{a}x=u$ とおくと，

$u^4+4b^2u^3+2(a^2b^2+3b^4-2a^2br-2b^3r+2b^2r^2)u^2-4b^2(a^2-b^2)(b^2-2br+2r^2)u+b^2(a^2-b^2)^2(b-2r)^2=0$

3 次の項を消去するために，$u=v-b^2$ とおくと，

$v^4+2b(a^2b-2a^2r-2b^2r+2br^2)v^2-8a^2b^2(b-r)^2v+a^2b^2(a^2b^2+4b^4-4a^2br-4b^3r+4a^2r^2)=0$

左辺は v についての 4 次方程式である。

ここで，v^2 の係数，v の係数，定数項をそれぞれ，l，m，n とおく。すなわち，$l=2b(a^2b-2a^2r-2b^2r+2br^2)$，

$m=-8a^2b^2(b-r)^2$，$n=a^2b^2(a^2b^2+4b^4-4a^2br-4b^3r+4a^2r^2)$ …⑥

ここで，4 次方程式 $x^4+lx^2+mx+n=0$ が重解をもつ条件は，

$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$ …⑦であるから，(*3)

⑦に⑥の 3 式を代入して整理すると，

$4096a^2b^7(a+b)^2(a-b)^2(b-r)^4\{4(b-2r)^3a^4-br^2(8b^2+4br-13r^2)a^2+4b^2r^4(b-r)\}=0$

$a>b>r$ より，$4(b-2r)^3a^4-br^2(8b^2+4br-13r^2)a^2+4b^2r^3=0$

$$a^2=\frac{br^2\{8b^2+4br-13r^2\pm(8b-7r)\sqrt{r(8b-7r)}\}}{8(b-2r)^3}$$

題意に適するのは，

$$a^2=\frac{br^2\{8b^2+4br-13r^2+(8b-7r)\sqrt{r(8b-7r)}\}}{8(b-2r)^3}=\frac{br^2\{(8b^2+4br-13r^2)^2-r(8b-7r)^3\}}{8(b-2r)^3\{8b^2+4br-13r^2-(8b-7r)\sqrt{r(8b-7r)}\}}$$

$$=\frac{br^2\cdot 64(b-2r)^3}{8(b-2r)^3\{8b^2+4br-13r^2-(8b-7r)\sqrt{r(8b-7r)}\}}=\frac{8br^2(b-r)}{8b^2+4br-13r^2-(8b-7r)\sqrt{r(8b-7r)}}$$

$a>0$ より，$a=\sqrt{\dfrac{8b(b-r)}{8b^2+4br-13r^2-(8b-7r)\sqrt{r(8b-7r)}}}\,r$

両辺に 2 を掛けると，$(2a)=\sqrt{\dfrac{8b(b-r)}{8b^2+4br-13r^2-(8b-7r)\sqrt{r(8b-7r)}}}\,(2r)$ となり，①が示せたので，術文の結果が得られたことになる。 終

(*3)

4 次方程式 $x^4+lx^2+mx+n=0$ が重解をもつ条件は，

$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$ である。

証明 $f(x)=x^4+lx^2+mx+n$ とおくと，$f'(x)=4x^3+2lx+m$ である。

重解を α とおくと，$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ であるから，

$\alpha^4+l\alpha^2+\alpha x+n=0$ …① $4\alpha^3+2l\alpha+m=0$ …②

この 2 式から α を消去する。

①× 4 −②× α より，$2l\alpha^3+3m\alpha+4n=0$ …③

②× l −③× 2α より，$-6m\alpha^2+(2l^2-8n)\alpha+lm=0$ …④

③× $3m$ −④× l より，$(2l^3-8ln+9m^2)\alpha+l^2m+12mn=0$ …⑤

④× $(2l^3-8ln+9m^2)$ +⑤× $6m\alpha$ より，

$4l(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+lm(2l^3-8ln+9m^2)=0$

$\therefore l=0$，$4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+m(2l^3-8ln+9m^2)=0$

[1] $l=0$ のとき

①，②より，α を消去すると，$-27m^4+256n^3=0$ …⑥

[2]　$4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+m(2l^3-8ln+9m^2)=0$ のとき，

$4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+m(2l^3-8ln+9m^2)=0$　…⑦

⑤× $4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)$ −⑦× $(2l^3-8ln+9m^2)$ より，

$3m(16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3)=0$

$\therefore m=0$，　$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$

[2−1]　$m=0$ のとき，

①，②より，α を消去すると，　$l^2-4n=0$　…⑧

[2−2]　$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$ のとき，

これは重解をもつ条件となる。

この式で，　$l=0$ とおくと，　$-27m^4+256n^3=0$ となり，⑥が得られる。

　　　　$m=0$ とおくと，　$16n(l^2-4n)^2=0$ となり，⑧が得られる。

以上から，重解をもつ条件は，$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$ となる。終

(2020/11/14　ジョーカー)