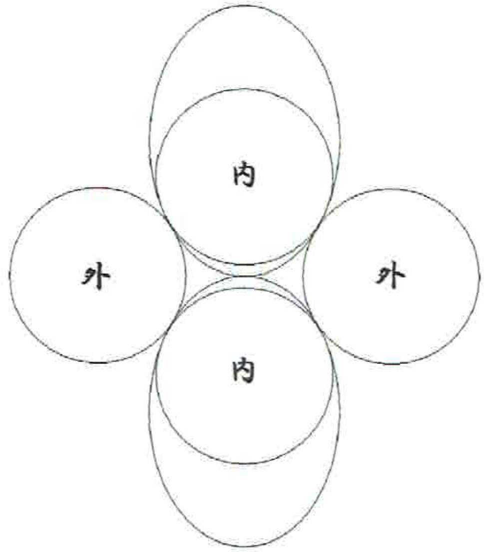
第 394 回

第 6 問題

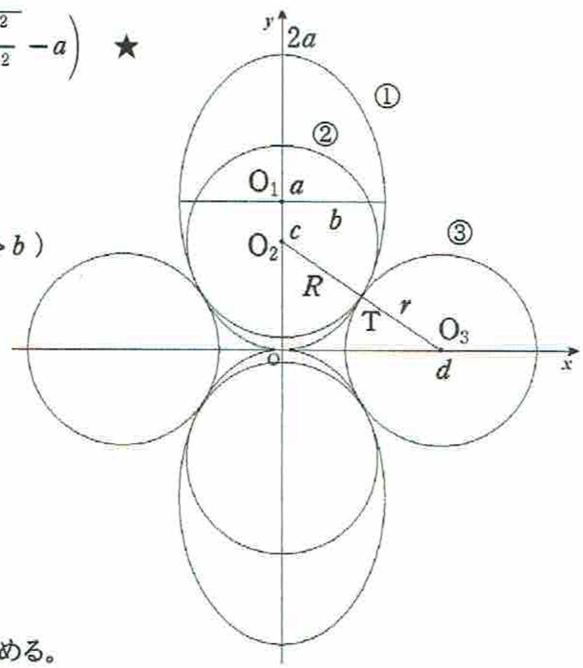
相等しい 2 個の楕円が長径の端で外接している。相対する 2 組の等円が互いに外接して楕円の周で接している。楕円の長径と短径の長さ及び内円の直径を与えたとき外円の直径を求めよ。



術文（答）

$$外円径(2r)=\frac{\left(\sqrt{\dfrac{長径^2-短径^2}{短径^2-円径^2}}\cdot 短径-長径\right)長径\cdot 円径}{短径^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\dfrac{(2a)^2-(2b)^2}{(2b)^2-(2R)^2}}\cdot 2b-2a\right)(2a)(2R)}{(2b)^2}$$



証明　術文（答）より，外円の半径 r は，$r=\dfrac{aR}{b^2}\left(b\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{b^2-R^2}}-a\right)$　★

となる。

座標平面で考える。

2 個の楕円の接点を原点に，長径を y 軸に重ねる。

上方の楕円の中心を$O_1(0,\ a)$，長径 $2a$，短径 $2b$ とする。（$a>b$）

$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{(y-a)^2}{a^2}=1$　…①

上方の内円の中心を$O_2(0,\ c)$，直径を $2R$ とする。

$x^2+(y-c)^2=R^2$　…②

右方の外円の中心を$O_3(d,\ 0)$，直径を $2r$ とする。

$(x-d)^2+y^2=r^2$　…③

証明の方針は，

(1)　①と②の接する条件式を求める。

(2)　②と③の接点における①と②，③の接線一致する条件式を求める。

(3)　この 2 つの条件式から $c,\ d$ を消去した式を，r について解く。

(1)　①，②から x を消去すると，$\dfrac{R^2-(y-c)^2}{b^2}+\dfrac{(y-a)^2}{a^2}=1$

分母を払って整理すると，$(a^2-b^2)y^2-2a(ac-b^2)y+a^2(c^2-R^2)=0$

y についての判別式を D とおくと，接するから，$D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=a^2(ac-b^2)^2-(a^2-b^2)\cdot a^2(c^2-R^2)=a^2(b^2c^2-2ab^2c+a^2R^2-b^2R^2+b^4)=0$ より，

$b^2c^2-2ab^2c+a^2R^2-b^2R^2+b^4=0$　　$c=a\pm\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-R^2)}}{b}$

$c<a$ より，　$c=a-\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-R^2)}}{b}$　…④

(2)　②と③の接点Tは，O_2，O_3 を $R:r$ に内分する点であるから，$\left(\dfrac{dR}{R+r},\ \dfrac{cr}{R+r}\right)$

この点における①の接線は，$\dfrac{\left(\dfrac{dR}{R+r}\right)x}{b^2}+\dfrac{\left(\dfrac{cr}{R+r}-a\right)(y-a)}{a^2}=1$　…⑤

Tにおける②，③の接線は共通で，Tにおける②，③の法線は，$\dfrac{x}{d}+\dfrac{y}{c}=1$　…⑥

⑤と⑥は垂直であるから，$\dfrac{dR}{b^2(R+r)}\cdot\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{cr}{R+r}-a\right)\cdot\dfrac{1}{c}=0$

r について解くと，$r=\dfrac{aR(ac-b^2)}{b^2(a-c)}$

(3)　ここで，④より

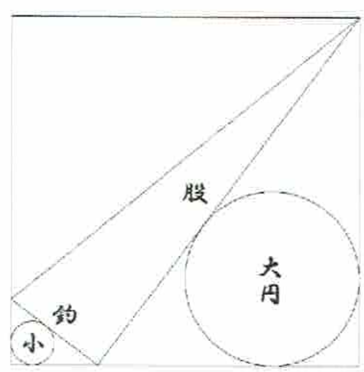
$a-c=a-\left\{a-\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-R^2)}}{b}\right\}=\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-R^2)}}{b}$，

$ac-b^2=a\left\{a-\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-R^2)}}{b}\right\}-b^2=\dfrac{b(a^2-b^2)-a\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-R^2)}}{b}$ であるから

$$r=\frac{aR(ac-b^2)}{b^2(a-c)}=\frac{aR}{b^2}\cdot\frac{\dfrac{b(a^2-b^2)-a\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-R^2)}}{b}}{\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-R^2)}}{b}}=\frac{aR}{b^2}\left(b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-R^2}}-a\right)$$

よって★が得られたので，術文（答）が示された。

第7問題



正方形内に直角三角形を描き，大小2円を内接させる。
正方形の1辺の長さを知るとき，大小2円の直径の和を
最大にしたい。
このとき直角三角形の2辺の長さを求めよ。
術文（答）
正方形の1辺の長さを a とすると，
鈎$=\dfrac{5}{16}$(方面)$=\dfrac{5}{16}a$，段$=\dfrac{5}{16}$(方面)$\times 4=\dfrac{5}{16}a\times 4=\dfrac{5}{4}a$

証明 図のように記号を付ける。

正方形の1辺を a，大円，小円の半径をそれぞれ R，r とし，

AE$=x$，AF$=y$ とおくと，EB$=a-x$，DF$=a-y$

三平方の定理により，

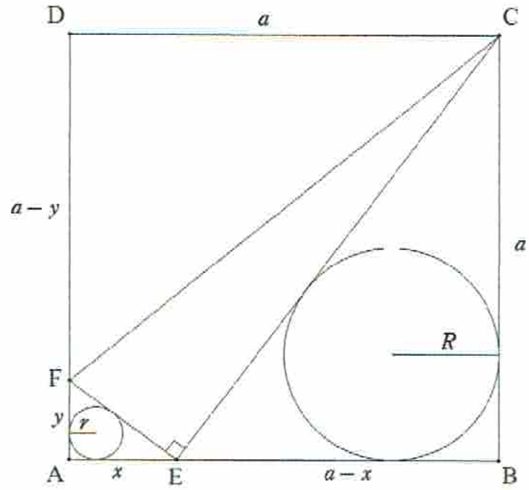
△AEF から，$FE^2=x^2+y^2$

△BCE から，$EC^2=a^2+(a-x)^2$

△DFC から，$CF^2=(a-y)^2+a^2$

△FEC から，$FE^2+EC^2=CF^2$ であるから，

$$x^2+y^2+a^2+(a-x)^2=(a-y)^2+a^2 \quad \therefore\ y=\frac{ax-x^2}{a} \quad \cdots①$$



$$2r+2R=2\cdot\frac{FA+AE-EF}{2}+2\cdot\frac{EB+BC-CE}{2}$$

$$=y+x-\sqrt{x^2+y^2}+(a-x)+a-\sqrt{a^2+(a-x)^2}$$

$$=y+2a-\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{a^2+(a-x)^2}$$

$$=\frac{ax-x^2}{a}+2a-\sqrt{x^2+\left(\frac{ax-x^2}{a}\right)^2}-\sqrt{a^2+(a-x)^2}$$

$$=\frac{1}{a}\left\{-x^2+ax+2a^2-(x+a)\sqrt{x^2-2ax+2a^2}\right\}=f(x)\text{ とおく。}$$

$$f'(x)=\frac{1}{a}\left\{-2x+a-1\cdot\sqrt{x^2-2ax+2a^2}-(x+a)\cdot\frac{2x-2a}{2\sqrt{x^2-2ax+2a^2}}\right\}$$

$$=\frac{(a-2x)\sqrt{x^2-2ax+2a^2}-(2x^2-2ax+a^2)}{a\sqrt{x^2-2ax+2a^2}}$$

$$=\frac{(a-2x)^2(x^2-2ax+2a^2)-(2x^2-2ax+a^2)^2}{a\sqrt{x^2-2ax+2a^2}\left\{(a-2x)\sqrt{x^2-2ax+2a^2}+2x^2-2ax+a^2\right\}}$$

$$=\frac{-a(x-a)^2(4x-a)}{a\sqrt{x^2-2ax+2a^2}\left\{(a-2x)\sqrt{x^2-2ax+2a^2}+2x^2-2ax+a^2\right\}}=0\text{ とおくと，}$$

$0<x<a$ の範囲では，$x=\frac{a}{4}$

$x<\frac{a}{4}$ のとき，$f'(x)>0$，$x>\frac{a}{4}$ のとき，$f'(x)<0$ より，$f(x)$ は $x=\frac{a}{4}$ のとき．極大かつ最大となる。

このとき，①より $y=\frac{3}{16}a$ であるから，

鈎：$FE=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{16}a\right)^2}=\frac{5}{16}a$

股：$EC=\sqrt{a^2+(a-x)^2}=\sqrt{a^2+\left(a-\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}a$ 終

補足 大円径 $2R=\frac{1}{2}a$，小円径 $2r=\frac{1}{8}a$

第8問題

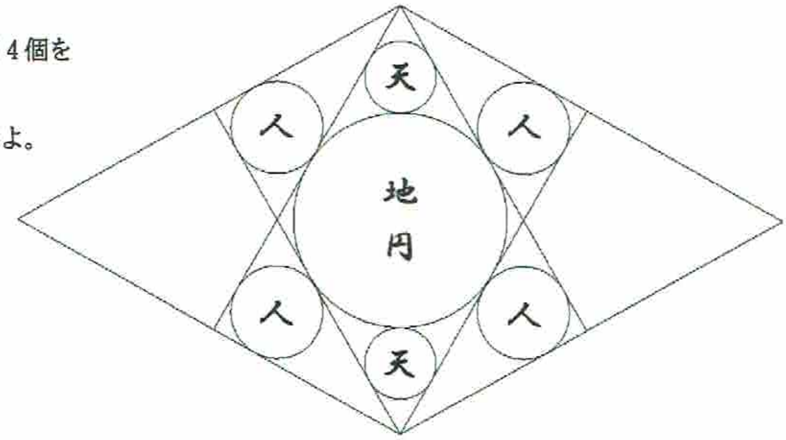
菱形内に4個の等しい斜線を引き最大な人円4個を描く。

天円，地円の直径を知って人円の直径を求めよ。

術文（答）

天円径＋地円径＝極とすると，

$$人円径=\frac{\left(\sqrt{4(天径)(地径)+極^2}-極\right)\cdot 極}{4(天径)}$$



証明　天地人円の中心（半径）をそれぞれ$O(r)$，$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$とおくと，術文に示された式は，

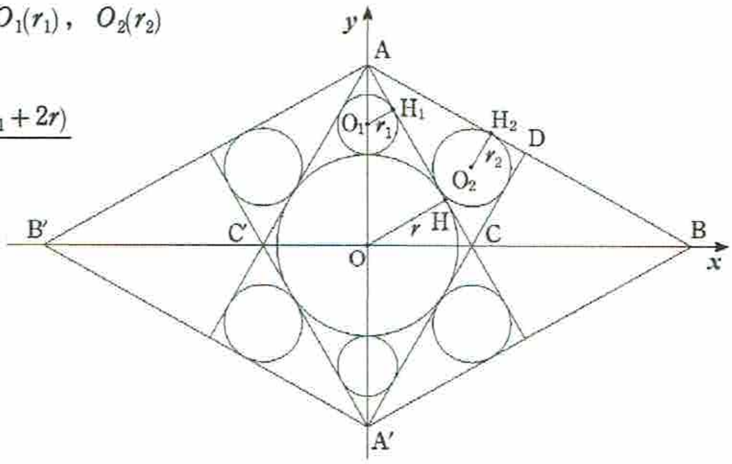
$$2r_2=\frac{\left\{\sqrt{4\cdot 2r_1\cdot 2r+(2r_1+2r)^2}-(2r_1+2r)\right\}\cdot(2r_1+2r)}{4\cdot 2r_1}$$

$$=\frac{(r+r_1)\left\{\sqrt{r^2+6rr_1+r_1{}^2}-(r+r_1)\right\}}{2r_1}\quad\cdots①$$

となる。

図形を座標平面に置き，図のように記号を付ける。

$\angle CAO=\theta$とおく。



$\sin\theta=\dfrac{r_1}{AO_1}=\dfrac{r-r_1}{r+r_1}$ より，$AO_1=\dfrac{r_1(r+r_1)}{r-r_1}$

$$AO=AO_1+r_1+r=\frac{r_1(r+r_1)}{r-r_1}+(r+r_1)=\frac{r(r+r_1)}{r-r_1}$$

$\triangle AO_1H_1$に三平方の定理を適用して，$AH_1=\sqrt{AO_1{}^2-O_1H_1{}^2}=\sqrt{\left\{\dfrac{r_1(r+r_1)}{r-r_1}\right\}^2-r_1{}^2}=\dfrac{2r_1\sqrt{rr_1}}{r-r_1}$

$\triangle AO_1H_1\backsim\triangle ACO$であるから，$AH_1:r_1=AO:OC$ より，$OC=\dfrac{r_1AO}{AH_1}=\dfrac{r_1\cdot\dfrac{r(r+r_1)}{r-r_1}}{\dfrac{2r_1\sqrt{rr_1}}{r-r_1}}=\dfrac{r(r+r_1)}{2\sqrt{rr_1}}$

以上より，$A\left(0,\ \dfrac{r(r+r_1)}{r-r_1}\right)$，$A'\left(0,\ -\dfrac{r(r+r_1)}{r-r_1}\right)$，$C\left(\dfrac{r(r+r_1)}{2\sqrt{rr_1}},\ 0\right)$となる。

計算を簡略化するために，$A(0,\ a)$，$A'(0,\ -a)$，$C(c,\ 0)$，$B(b,\ 0)$とおく。ただし，$c<b$である。

直線ABの方程式は，$\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1$，直線A′Cの方程式は，$\dfrac{x}{c}-\dfrac{y}{a}=1$であるから，連立させて，

$D\left(\dfrac{2bc}{b+c},\ \dfrac{a(b-c)}{b+c}\right)$となる。

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} c & -a \\ \dfrac{2bc}{b+c} & \dfrac{a(b-c)}{b+c}-a\end{vmatrix}\right\|=\frac{ac(b-c)}{b+c}$$

$$s=\frac{1}{2}(AC+CD+DA)=\frac{1}{2}(A'D+AD)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{2bc}{b+c}\right)^2+\left\{\frac{a(b-c)}{b+c}+a\right\}^2}+\sqrt{\left(\frac{2bc}{b+c}\right)^2+\left\{\frac{a(b-c)}{b+c}-a\right\}^2}\right]$$

$$=\frac{b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}}{b+c}$$

よって，△ACDの内接円の半径 r_2 は，

$$r_2=\frac{\triangle ACD}{s}=\frac{\dfrac{ac(b-c)}{b+c}}{\dfrac{b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}}{b+c}}=\frac{c(b\sqrt{a^2+c^2}-c\sqrt{a^2+b^2})}{a(b+c)}\quad\cdots②$$

ここで，$r_2=f(c)=\dfrac{c(b\sqrt{a^2+c^2}-c\sqrt{a^2+b^2})}{a(b+c)}$ とおき，最大値を求める。

$$f'(c)=\frac{(b+c)\left\{b\sqrt{a^2+c^2}-c\sqrt{a^2+b^2}+c\left(\dfrac{b\cdot 2c}{2\sqrt{a^2+c^2}}-\sqrt{a^2+b^2}\right)\right\}-c(b\sqrt{a^2+c^2}-c\sqrt{a^2+b^2})\cdot 1}{a(b+c)^2}$$

$$=\frac{a^2b^2+2b^2c^2+bc^3-(2bc+c^2)\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}}{a(b+c)^2\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$=\frac{(a^2b^2+2b^2c^2+bc^3)^2-(2bc+c^2)^2(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a(b+c)^2\sqrt{a^2+c^2}\left\{a^2b^2+2b^2c^2+bc^3+(2bc+c^2)\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}\right\}}$$

$$=\frac{a^2(b+c)^2(a^2b^2-2a^2bc-a^2c^2-2bc^3-c^4)}{a(b+c)^2\sqrt{a^2+c^2}\left\{a^2b^2+2b^2c^2+bc^3+(2bc+c^2)\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}\right\}}$$

$$=\frac{a(a^2b^2-2a^2bc-a^2c^2-2bc^3-c^4)}{\sqrt{a^2+c^2}\left\{a^2b^2+2b^2c^2+bc^3+(2bc+c^2)\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}\right\}}=0 \text{ とおくと，}$$

$a^2b^2-2a^2bc-a^2c^2-2bc^3-c^4=0\quad\therefore\ c^4+2bc^3+a^2c^2+2a^2bc-a^2b^2=0\cdots③$

$g(c)=c^4+2bc^3+a^2c^2+2a^2bc-a^2b^2$ とおく。$a>0,\ b>0$

$g(0)=-a^2b^2<0$，$g(b)=2a^2b^2+3b^4>0$ より，$0<c<b$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

しかし，この範囲では，$g'(c)=4c^3+6bc^2+2a^2c+2a^2b>0$ となり，単調増加であるから，実数解は1個だけである。この解を，$c=c_0$ とおくと，$c<c_0$ のとき，$f'(c)>0$，$c_0<c$ のとき，$f'(c)<0$ であるから，$r_2=f(c)$ は，$c=c_0$ のとき，極大かつ最大となる。

この問題では，$c_0=\dfrac{r(r+r_1)}{2\sqrt{rr_1}}$ で，$a=\dfrac{r(r+r_1)}{r-r_1}$ であるから，③より b を求める。

③を b について整理すると，$a^2b^2-2c(a^2+c^2)b-c^2(a^2+c^2)=0$

$$b=\frac{c(a^2+c^2)\pm\sqrt{c^2(a^2+c^2)^2+a^2c^2(a^2+c^2)}}{a^2}=\frac{c(a^2+c^2)\pm c\sqrt{(a^2+c^2)(2a^2+c^2)}}{a^2}$$

$b>0$ より，$b=\dfrac{c(a^2+c^2)+c\sqrt{(a^2+c^2)(2a^2+c^2)}}{a^2}$

これに $a=\dfrac{r(r+r_1)}{r-r_1}$，$c=\dfrac{r(r+r_1)}{2\sqrt{rr_1}}$ を代入する。

まず，$a^2+c^2=\left\{\dfrac{r(r+r_1)}{r-r_1}\right\}^2+\left\{\dfrac{r(r+r_1)}{2\sqrt{rr_1}}\right\}^2=\dfrac{r^2(r+r_1)^4}{4rr_1(r-r_1)^2}$，

$2a^2+c^2=2\left\{\dfrac{r(r+r_1)}{r-r_1}\right\}^2+\left\{\dfrac{r(r+r_1)}{2\sqrt{rr_1}}\right\}^2=\dfrac{r^2(r+r_1)^2(r^2+6rr_1+r_1^2)}{4rr_1(r-r_1)^2}$

ここで，$R=\sqrt{r^2+6rr_1+r_1^2}$ とおくと，$2a^2+c^2=\dfrac{r^2(r+r_1)^2R^2}{4rr_1(r-r_1)^2}$ であるから，

$$b=\frac{\dfrac{r(r+r_1)}{2\sqrt{rr_1}}\cdot\dfrac{r^2(r+r_1)^4}{4rr_1(r-r_1)^2}+\dfrac{r(r+r_1)}{2\sqrt{rr_1}}\sqrt{\dfrac{r^2(r+r_1)^4}{4rr_1(r-r_1)^2}\cdot\dfrac{r^2(r+r_1)^2R^2}{4rr_1(r-r_1)^2}}}{\left\{\dfrac{r(r+r_1)}{r-r_1}\right\}^2}=\frac{(r+r_1)^2(r+r_1+R)}{8r_1\sqrt{rr_1}}$$

最後に，$r_2=\dfrac{c(b\sqrt{a^2+c^2}-c\sqrt{a^2+b^2})}{a(b+c)}=\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{1}{b+c}\cdot(b\sqrt{a^2+c^2}-c\sqrt{a^2+b^2})$ …②'の値を計算する。

$$\frac{c}{a}=\frac{r-r_1}{2\sqrt{rr_1}}\quad\cdots④$$

$$b+c=\frac{(r+r_1)^2(r+r_1+R)}{8r_1\sqrt{rr_1}}+\frac{r(r+r_1)}{2\sqrt{rr_1}}=\frac{(r+r_1)(r+r_1+R)R}{8r_1\sqrt{rr_1}}\quad\cdots⑤$$

$$b\sqrt{a^2+c^2}=\frac{(r+r_1)^2(r+r_1+R)}{8r_1\sqrt{rr_1}}\cdot\frac{r(r+r_1)^2}{2\sqrt{rr_1}(r-r_1)}=\frac{(r+r_1)^4(r+r_1+R)}{16r_1^2(r-r_1)}\quad\cdots⑥$$

$$a^2+b^2=\left\{\frac{r(r+r_1)}{r-r_1}\right\}^2+\left\{\frac{(r+r_1)^2(r+r_1+R)}{8rr_1(r-r_1)^2}\right\}^2$$

$$=\frac{(r+r_1)^2\{r^6+4r^5r_1-r^4r_1^2+24r^3r_1^3-r^2r_1^4+4rr_1^5+r_1^6+(r-r_1)^2(r+r_1)^3\sqrt{r^2+6rr_1+r_1^2}\}}{32rr_1^3(r-r_1)^2}$$

$$=\frac{(r+r_1)^2\{(r+r_1)^3+(r-r_1)^2\sqrt{r^2+6rr_1+r_1^2}\}^2}{64rr_1^3(r-r_1)^2}$$ より，

$$c\sqrt{a^2+b^2}=\frac{r(r+r_1)}{2\sqrt{rr_1}}\cdot\frac{(r+r_1)\{(r+r_1)^3+(r-r_1)^2R\}}{8r_1\sqrt{rr_1}(r-r_1)}=\frac{(r+r_1)^2\{(r+r_1)^3+(r-r_1)^2R\}}{16r_1^2(r-r_1)}\quad\cdots⑦$$

④，⑤，⑥，⑦を②'に代入すると，

$$r_2=\frac{c}{a}\cdot\frac{1}{b+c}\cdot(b\sqrt{a^2+c^2}-c\sqrt{a^2+b^2})$$

$$=\frac{r-r_1}{2\sqrt{rr_1}}\cdot\frac{8r_1\sqrt{rr_1}}{(r+r_1)(r+r_1+R)R}\left[\frac{(r+r_1)^4(r+r_1+R)}{16r_1^2(r-r_1)}-\frac{(r+r_1)^2\{(r+r_1)^3+(r-r_1)^2R\}}{16r_1^2(r-r_1)}\right]$$

$$=\frac{4r_1(r-r_1)}{(r+r_1)(r+r_1+R)R}\cdot\frac{(r+r_1)^2[(r+r_1)^2(r+r_1+R)-\{(r+r_1)^3+(r-r_1)^2R\}]}{16r_1^2(r-r_1)}$$

$$=\frac{4r_1(r-r_1)}{(r+r_1)(r+r_1+R)R}\cdot\frac{(r+r_1)^2\cdot 4rr_1R}{16r_1^2(r-r_1)}=\frac{r(r+r_1)}{r+r_1+R}=\frac{r(r+r_1)\{R-(r+r_1)\}}{R^2-(r+r_1)^2}$$

ここで，$R=\sqrt{r^2+6rr_1+r_1^2}$ であるから，

$$r_2=\frac{r(r+r_1)\{\sqrt{r^2+6rr_1+r_1^2}-(r+r_1)\}}{4rr_1}=\frac{(r+r_1)\{\sqrt{r^2+6rr_1+r_1^2}-(r+r_1)\}}{4r_1}$$

両辺に 2 を掛けて，$2r_2=\dfrac{(r+r_1)\{\sqrt{r^2+6rr_1+r_1^2}-(r+r_1)\}}{2r_1}$

よって，①が示せたので，術文（答）が示せたことになる。 終

第 9 問題

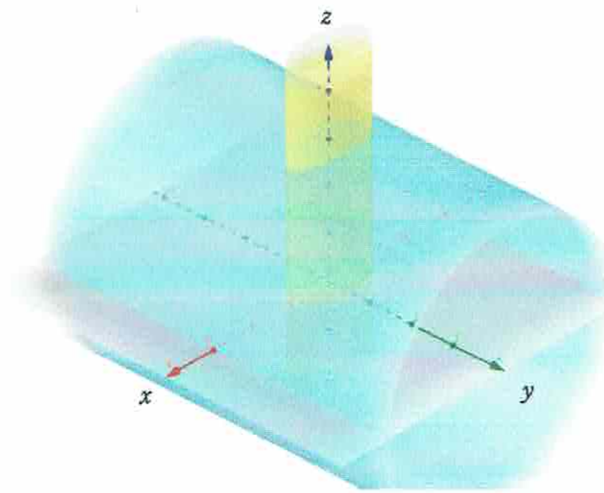
直円柱を楕円で穿去する。（楕円の短径は円柱面に平行）
楕円の長径，短径と円柱の直径を知って，穿去する表面積を求めよ。

術文（答）

表面積$=\pi ab\left(1+\dfrac{1}{2\cdot 4}k^2+\dfrac{3\cdot 5}{2^2\cdot 2\cdot 4\cdot 6}k^4+\dfrac{3\cdot 5\cdot 5}{2^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}k^6+\cdots\right)$，$\left(k=\dfrac{b}{R}\text{とする}\right)$

証明　術文（答）では，$k=\dfrac{b}{R}$ とすると，表面積$=\pi ab\left(1+\dfrac{1}{8}k^2+\dfrac{5}{64}k^4+\dfrac{25}{1024}k^6+\cdots\right)$　★となる。

空間座標で考える。



直円柱の中心軸を y 軸，楕円柱の中心軸を z 軸にとる。

直円柱：$x^2+z^2=R^2$　…①

楕円柱：$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\ (a<b)$　…②

とおき，求める面積を S とする。

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の部分の表面積を S_1 とおくと，

$$S=4S_1=4\iint_P\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

ここで，①，②から，

$z=\sqrt{R^2-x^2}$，$y=a\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{b}\right)^2}$ であるから，

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2+0=\frac{R^2}{R^2-x^2}$$

従って，

$$S=4\int_0^b dx\int_0^{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dy\quad=4\int_0^b\frac{aR\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=4a\int_0^b\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}dx$$

ここで，$x=bt$，$\dfrac{b}{R}=k$ とおくと，$\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-k^2t^2}}$，$dx=bdt$，

x	$0\to b$
t	$0\to 1$

より，

$$S=4ab\int_0^1\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-k^2t^2}}dt$$（第 2 種楕円積分）

ここで，二項定理(*1) を適用すると，

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}}=(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\left(-\frac{1}{2}\right)k^2t^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}k^4t^4-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}k^6t^6+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{4!}k^8t^8+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}k^2t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6t^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}k^8t^8+\cdots$$

であるから，

$$S=4ab\int_0^1\sqrt{1-t^2}\left(1+\frac{1}{2}k^2t^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4t^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6t^6+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}k^8t^8+\cdots\right)dt$$

ここで，$I_n=\int_0^1 t^{2n}\sqrt{1-t^2}\,dt$ とおくと，

$I_0=\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$ である。（$\because$ 半径 1 の $\frac{1}{4}$ 円の面積）

$n\geqq1$ のとき，$t=\sin\theta$ とおくと，$dt=\cos\theta\,d\theta$，

t	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{2}$

より，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$

$u'=\sin^{2n}\theta\cos\theta$，$v=\cos\theta$ とおくと，$u=\frac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}\theta$，$v'=-\sin\theta$ より，

$$I_n=\left[\frac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}\theta\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}\theta(-\sin\theta)d\theta=\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+2}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\,d\theta-\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2n+1}\cdot(2n-1)I_{n-1}-\frac{1}{2n+1}I_n$$ より，移項して，

$$I_n=\frac{2n-1}{2n+2}I_{n-1}=\frac{2n-1}{2n+2}\cdot\frac{2n-3}{2n}I_{n-2}=\frac{2n-1}{2n+2}\cdot\frac{2n-3}{2n}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{4}I_0=\frac{2n-1}{2n+2}\cdot\frac{2n-3}{2n}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$\therefore I_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot(2n+2)}\cdot\frac{\pi}{4}$ となるから，

$$S=4ab\left(I_0+\frac{1}{2}I_1k^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}I_2k^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}I_3k^6+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}I_4k^8+\cdots\right)$$

$$=4ab\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}k^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3}{4\cdot6}\cdot\frac{\pi}{4}k^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\pi}{4}k^6+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{\pi}{4}k^8+\cdots\right)$$

$$=4ab\cdot\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1^2}{2\cdot4}k^2+\frac{1^2\cdot3^2}{2\cdot4^2\cdot6}k^4+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8}k^6+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2\cdot10}k^8+\cdots\right)$$

$$=\pi ab\left(1+\frac{1^2}{2\cdot4}k^2+\frac{1^2\cdot3^2}{2\cdot4^2\cdot6}k^4+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8}k^6+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2\cdot10}k^8+\cdots\right),\ \left(k=\frac{b}{R}\right)$$ 答

補足　カッコの中の係数を計算すると，$S=\pi ab\left(1+\frac{1}{8}k^2+\frac{3}{64}k^4+\frac{25}{1024}k^6+\frac{245}{16384}k^8+\cdots\right)$ となるから，★と比べ術文（答）のカッコの中の第 3 項の係数の分子は 5 でなく，3 であると思われる。

よって，術文（答）は，表面積$=\pi ab\left(1+\frac{1}{2\cdot4}k^2+\frac{3\cdot3}{2^2\cdot2\cdot4\cdot6}k^4+\frac{3\cdot5\cdot5}{2^3\cdot2\cdot4\cdot6\cdot8}k^6+\cdots\right)$ と訂正される。

また，この表し方では，カッコの中の第 5 項が予想できない。

(*1)　二項定理　m を任意の実数，$-1<x<1$ とすると，

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

証明は省略（参考文献[2] P.258 にあり。）

また，同書 P.354 からの曲面の面積についても参考にした。

【参考文献】

[1]　高木重之著　岐阜県の算額の解説（第 9 問題）

[2]　微分積分学精説　改訂版　岩切晴二著　培風館　昭和35年

(2020/11/28　ジョーカー)

(2020/12/13　ジョーカー)