第 396 回　追加問題 2

【補題】

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$， $0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき， 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{2} \geqq \tan\frac{\alpha+\beta}{2} \geqq \sqrt{\tan\alpha\tan\beta}$$

証明 1

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=a$， $\tan\dfrac{\beta}{2}=b$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{2a}{1-a^2}$， $\tan\beta=\dfrac{2b}{1-b^2}$， $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{a+b}{1-ab}$ である。

また， $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$， $0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$， $0<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ より， $0<a<1,\ 0<b<1$， $0<\dfrac{a+b}{1-ab}<1$ である。

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}-\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\dfrac{2a}{1-a^2}+\dfrac{2b}{1-b^2}}{2}-\frac{a+b}{1-ab}=\frac{a(1-b^2)+b(1-a^2)}{(1-a^2)(1-b^2)}-\frac{a+b}{1-ab}$$

$=\dfrac{(a+b)\{(1-ab)^2-(1-a^2)(1-b^2)\}}{(1-a^2)(1-b^2)(1-ab)}=\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-ab)}\geqq 0$ （等号は， $\alpha=\beta$ のとき）

$\therefore\ \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}\geqq\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　…①

$$\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\tan\alpha\tan\beta=\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)^2-\frac{2a}{1-a^2}\cdot\frac{2b}{1-b^2}=\frac{(a+b)^2(1-a^2)(1-b^2)-4ab(1-ab)^2}{(1-ab)^2(1-a^2)(1-b^2)}$$

$$=\frac{(a+b)^2\{(1-ab)^2-(a-b)^2\}-4ab(1-ab)^2}{(1-ab)^2(1-a^2)(1-b^2)}=\frac{(a-b)^2(1-ab)^2-(a+b)^2(a-b)^2}{(1-ab)^2(1-a^2)(1-b^2)}$$

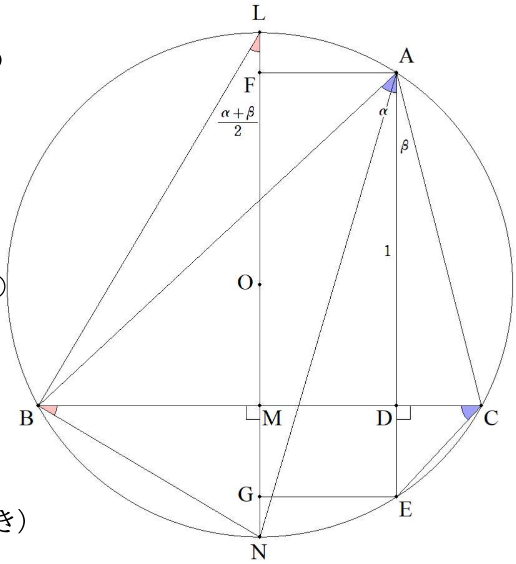
$=\dfrac{(a-b)^2(1-ab+a+b)(1-ab-a-b)}{(1-ab)^2(1-a^2)(1-b^2)}=\dfrac{(a-b)^2\left(1+\dfrac{a+b}{1-ab}\right)\left(1-\dfrac{a+b}{1-ab}\right)}{(1-a^2)(1-b^2)}\geqq 0$ （等号は $\alpha=\beta$ のとき）

$\therefore\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geqq\tan\alpha\tan\beta$

$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}>0$， $\tan\alpha\tan\beta>0$ であるから， $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geqq\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}$　…②

①，②より， $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}\geqq\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geqq\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}$ （等号は $\alpha=\beta$ のとき）　終

証明 2　(幾何学的な証明)



$\triangle$ABCの外接円をOとする。AからBCに下した垂線の足をD，ADの延長と外接円との交点をE，劣弧BCの中点をN，NOとBCの交点をM，NOの延長と外接円の交点をL，A，EからLNに下した垂線の足をそれぞれF，Gとする。また，AD＝1，$\angle$BAD＝α，$\angle$CAD＝βとおくと，$\angle$BLN＝$\angle$BAN＝$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$である。

このとき，BD＝$\tan\alpha$，DC＝$\tan\beta$，BM＝LM$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　…①

である。

また，$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}=\dfrac{BD+DC}{2}=\dfrac{BC}{2}=$BM　…②

①，②から，LM＝$\dfrac{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\geqq$AD＝1（等号は$\alpha=\beta$のとき）

よって，$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}\geqq\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　…③

次に，$\angle$NBM＝$\angle$BLM＝$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$であるから，MN＝BM$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$＝LM$\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$\angle$ECD＝$\angle$BAD＝αであるから，DE＝DC$\tan\alpha=\tan\alpha\tan\beta$

LN // AEより，AL＝EN，AF＝EGであるから，LF＝NGである。

LM－AD＝LF＝NG＝MN－DE

LM－1＝LM$\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\tan\alpha\tan\beta$　$\therefore$LM＝$\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\geqq$AD＝1（等号は$\alpha=\beta$のとき）

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$より，$0<\tan\alpha<1$，$0<\tan\beta<1$であるから

$1-\tan\alpha\tan\beta>0$，$1-\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}>0$，$1-\tan\alpha\tan\beta\geqq1-\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geqq\tan\alpha\tan\beta$

よって，$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geqq\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}$　…④

③，④より，$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}\geqq\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geqq\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}$（等号は，$\alpha=\beta$のとき）　終

【追加問題 2】

$0<A<B<C<\frac{\pi}{4}$ を満たす角 A, B, C は等差数列をなし，

$1+\tan A$ ， $1+\tan B$ ， $1+\tan C$ が等比数列をなすとき，
$\tan B$ の値を求めよ。

解答　$1+\tan A$ ， $1+\tan B$ ， $1+\tan C$ が等比数列をなすから，$(1+\tan A)(1+\tan C)=(1+\tan B)^2$
展開して移項すると， $\tan A+\tan C-2\tan B=-\tan A\tan C+\tan^2 B$

ここで， A, B, C は，等差数列をなすから， $B=\frac{A+C}{2}$ を代入すると，

$$\tan A+\tan C-2\tan\frac{A+C}{2}=-\tan A\tan C+\tan^2\frac{A+C}{2}$$

$$\therefore \tan A+\tan C-2\tan\frac{A+C}{2}=1-\tan A\tan C-\left(1-\tan^2\frac{A+C}{2}\right)\quad\cdots①$$

ここで，$\tan(A+C)=\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\frac{2\tan\frac{A+C}{2}}{1-\tan^2\frac{A+C}{2}}$ であるから，①の右辺は，

右辺$=\frac{\tan A+\tan C}{\tan(A+C)}-\frac{2\tan\frac{A+C}{2}}{\tan(A+C)}=\frac{\tan A+\tan C-2\tan\frac{A+C}{2}}{\tan(A+C)}$ より，

①は，$\tan A+\tan C-2\tan\frac{A+C}{2}=\frac{\tan A+\tan C-2\tan\frac{A+C}{2}}{\tan(A+C)}$ となる。

$0<A<C<\frac{\pi}{4}$ のとき，$\tan A+\tan C-2\tan\frac{A+C}{2}>0$ であるから（∵補題により），

$\tan(A+C)=1$ より，$A+C=\frac{\pi}{4}$　$\therefore B=\frac{A+C}{2}=\frac{\pi}{8}$

よって， $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}=\sqrt{2}-1$　答

(2021/1/8　ジョーカー)