第396回

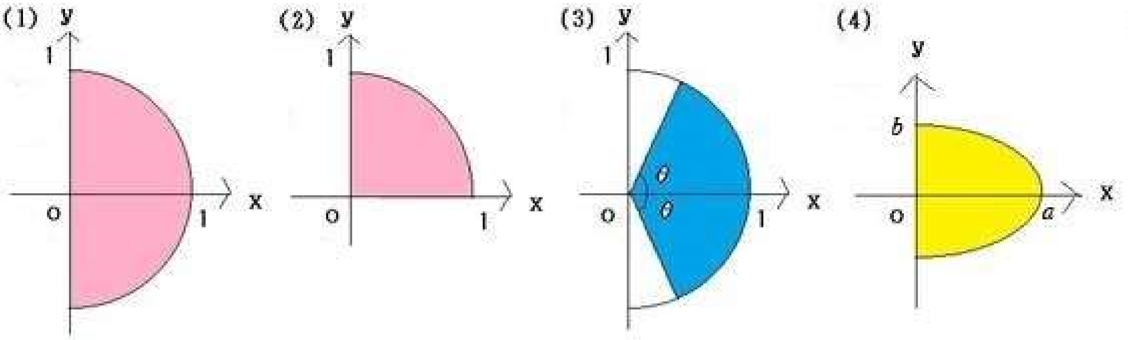
［図形の重心（2）］

問題(1)　図のような半径1の半円の重心座標を求めよ。

問題(2)　図のような半径1の四分円の重心座標を求めよ。

問題(3)　図のような半径1，中心角2θの扇形の重心座標を求めよ。

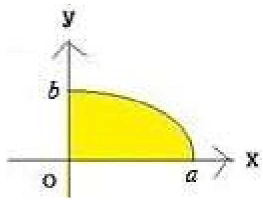
問題(4)　図のような楕円の重心座標を求めよ。ただし，$a>b$とする。



問題(2)

公式　平面図形A（面積がA）の重心の座標を$(\overline{x},\ \overline{y})$とすると，$\overline{x}=\dfrac{\iint_A xdA}{A}$，$\overline{y}=\dfrac{\iint_A ydA}{A}$である。

解答　少し一般化して，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$の不等式の表す領域（右図の楕円の$\dfrac{1}{4}$の図形$A$）の重心を考える。



$y\geqq 0$のとき，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$より，$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

まず，$A=\dfrac{\pi}{4}ab$である。

$$\iint_A xdA=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xdy=\int_0^a[y]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}xdx=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,xdx=\frac{b}{a}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{2}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{a^2b}{3}$$

同様に，$\displaystyle\iint_A ydA=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy=\int_0^a\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{ab^2}{3}$

よって，$\overline{x}=\dfrac{\frac{a^2b}{3}}{\frac{\pi}{4}ab}=\dfrac{4a}{3\pi}$，$\overline{y}=\dfrac{\frac{ab^2}{3}}{\frac{\pi}{4}ab}=\dfrac{4b}{3\pi}$であるから，重心は，$\left(\dfrac{4a}{3\pi},\ \dfrac{4b}{3\pi}\right)$

問題(2)は$a=b=1$の場合であるから，$\left(\dfrac{4}{3\pi},\ \dfrac{4}{3\pi}\right)$　答

問題(4)

解答　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$， $x\geqq 0$ の不等式の表す図形 A の重心を G $(\overline{x},\ \overline{y})$ とおく。

図形 A は x 軸に関して対称であるから， $\overline{y}=0$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$， $x\geqq 0$， $y\geqq 0$ の不等式の表す領域 A_1 の重心 G_1 について，問題(2) より， $\overline{x_1}=\dfrac{4a}{3\pi}$，

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$， $x\geqq 0$， $y\leqq 0$ の不等式の表す領域 A_2 の重心 G_2 についても同様に， $\overline{x_2}=\dfrac{4a}{3\pi}$ である。

A_1， A_2 は x 軸に関して対称であるから， $\overline{x}=\dfrac{4a}{3\pi}$ となる。

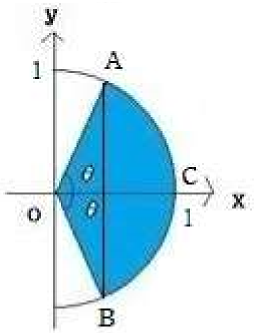
よって， 重心は， $\left(\dfrac{4a}{3\pi},\ 0\right)$　答

問題(1)

解答　問題(4) において， $a=b=1$ の場合であるから，求める重心は， $\left(\dfrac{4}{3\pi},\ 0\right)$　答

問題(3)

解答　求める扇形，△OBA，弓型 ABC はそれぞれ x 軸に関して対称な図形であるから，
それぞれ重心の y 座標は 0 である。



$\triangle\mathrm{OBA}=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\sin 2\theta=\sin\theta\cos\theta$， △OBAの重心は $\left(\dfrac{2}{3}\cos\theta,\ 0\right)$ である。

弓型 ABC$=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta-\triangle\mathrm{OBA}=\theta-\sin\theta\cos\theta$， 弓型 ABC の重心を $(\overline{x_1},\ 0)$ とおくと，

$$\overline{x_1}=\frac{2\int_{\cos\theta}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx}{\theta-\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\theta-\sin\theta\cos\theta}\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\cos\theta}^{1}=\frac{2\sin^3\theta}{3(\theta-\sin\theta\cos\theta)}$$

求める扇形の重心を $(\overline{x},\ 0)$ とおくと，

$$\left(\overline{x}-\frac{2}{3}\cos\theta\right)\sin\theta\cos\theta=\left\{\frac{2\sin^3\theta}{3(\theta-\sin\theta\cos\theta)}-\overline{x}\right\}(\theta-\sin\theta\cos\theta)$$

$$\theta\overline{x}=\frac{2}{3}\sin\theta\cos^2\theta+\frac{2}{3}\sin^3\theta=\frac{2}{3}\sin\theta\qquad\therefore\ \overline{x}=\frac{2\sin\theta}{3\theta}$$

よって，扇形の求める重心は， $\left(\dfrac{2\sin\theta}{3\theta},\ 0\right)$　答

(2021/2/3　ジョーカー)