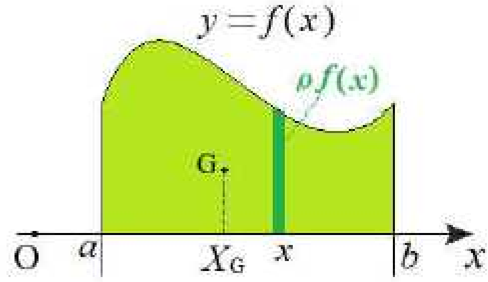
● 第 396 回問題解答＜三角定規＞

【問題】

右図のような平面図形の重心 G の x 座標 X_G は，G が質量モーメントの代表点であることから

$$X_G \cdot \int_a^b \rho f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho x f(x)\mathrm{d}x \quad (\rho：密度)$$

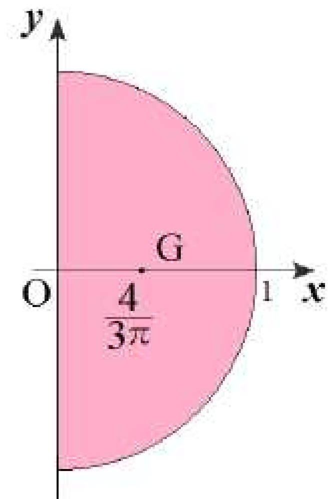
$$\therefore\ X_G = \frac{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} \quad \cdots(*)$$



(1) 半円　(*)より

$$X_G = \frac{\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^1 \sqrt{1-u}\,\mathrm{d}u}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left[-\frac{2}{3}(1-u)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi}$$

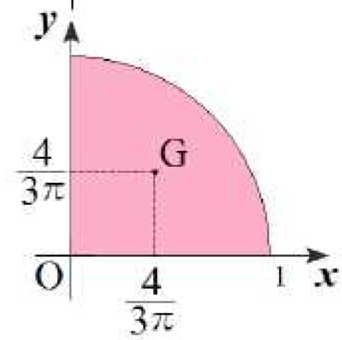
重心座標は　$\mathbf{G}\left(\frac{4}{3\pi},\ 0\right)$



(2) 四分円　(*)より

$$\mathrm{OG} = \frac{\int_0^{1/\sqrt{2}} x^2\mathrm{d}x + \int_{1/\sqrt{2}}^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x}{\int_0^{1/\sqrt{2}} x\mathrm{d}x + \int_{1/\sqrt{2}}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{8}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

重心座標は　$\mathbf{G}\left(\frac{4}{3\pi},\ \frac{4}{3\pi}\right)$　$\left(\because\ X_G = Y_G = \mathrm{OG}\cos\frac{\pi}{4}\right)$



※ 四分円の重心は，半円の重心がわかっていれば計算なしでも求められます。
　図(下)の右上四分円と上下を反転させた右下四分円をくっ付け右半円(図上)を作っても重心の x 座標は変わらない。また対称性より，四分円の重心の x 座標と y 座標は等しい。

(3) 扇形

$$(*)の分子 = \int_0^{\cos\theta} x\cdot\tan\theta\cdot x\mathrm{d}x + \int_{\cos\theta}^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

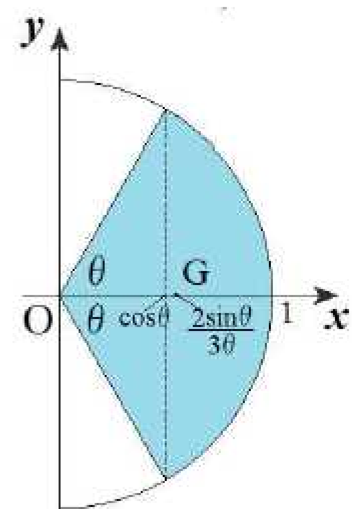
$$= \tan\theta\int_0^{\cos\theta} x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\alpha^1 \sqrt{1-u}\,\mathrm{d}u \quad (\alpha = \cos^2\theta)$$

$$= \tan\theta\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\cos\theta} - \frac{1}{3}\left[(1-u)^{\frac{3}{2}}\right]_\alpha^1$$

$$= \frac{1}{3}\sin\theta\cos^2\theta + \frac{1}{3}\sin^3\theta = \frac{1}{3}\sin\theta$$

$(*)$の分母$= \frac{1}{2}\theta$　(∵ 中心角 θ の扇形の面積)

重心座標は　$\mathbf{G}\left(\frac{2\sin\theta}{3\theta},\ 0\right)$　（※ ここで $\theta = \frac{\pi}{4}$ とすれば，(2)の OG に一致。）



(4) 半楕円

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ より $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，よって

$$(*)の分子 = \frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{2a}\int_0^A \sqrt{A-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}a^2b \quad (A = a^2)$$

$(*)$の分母$= \frac{\pi ab}{4}$　(∵ 四分楕円の面積)

重心座標は　$\mathbf{G}\left(\frac{4a}{3\pi},\ 0\right)$