

● 第 396 回追加問題解答<三角定規>

$0 < A < B < C < \pi/4$  が等差数列をなすことから、 $0 < d < B$  である  $d$  を用いて

$$A = B - d, C = B + d \cdots \textcircled{1}$$

と書くことが出来る。

また、 $1 + \tan A, 1 + \tan B, 1 + \tan C$  が等比数列をなすことから

$$(1 + \tan A)(1 + \tan C) = (1 + \tan B)^2$$

①を用い

$$(1 + \tan(B - d))(1 + \tan(B + d)) = (1 + \tan B)^2 \cdots \textcircled{2}$$

②の左辺を加法定理で展開し  $\tan B = x, \tan d = y$  とおくと

$$\left(1 + \frac{x - y}{1 + xy}\right) \left(1 + \frac{x + y}{1 - xy}\right) = (1 + x)^2 \cdots \textcircled{3}$$

③の分母を払い

$$(1 + xy + x - y)(1 - xy + x + y) = (1 + x)^2(1 + xy)(1 - xy) \cdots \textcircled{4}$$

④を展開しコツコツ計算すると、 $y$  を含む項は全て消えて

$$(x^2 + 1)(x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \therefore x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = \tan B > 0 \text{ より, } \tan B = \sqrt{2} - 1 \quad \left( B = \frac{\pi}{8} \right) \cdots [\text{答}]$$