【補題】

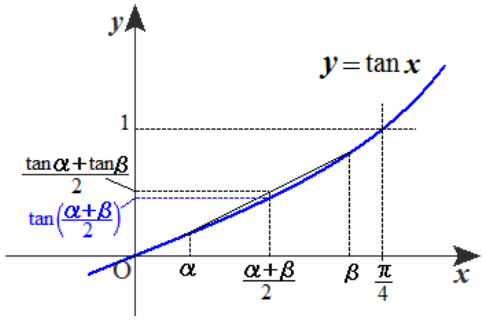
$0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，　$\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\leqq\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\leqq\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}$　…⑤

・⑤の右側の不等式

$f(x)=\tan x$ とおくと，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で下に凸だから

$0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{4}$ について，$f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\leqq\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

よって，右側の不等式が成り立つ。



（↑上図　やや強調してあります）

・⑤の左側の不等式

$\dfrac{\alpha}{2}=A,\ \dfrac{\beta}{2}=B$ とおき　$\tan(2A)\tan(2B)\leqq\tan^2(A+B)$ …⑥ を示す。

$\tan A=x,\ \tan B=y$ とおき ⑥ を $x,\ y$ で表すと

$\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2-\dfrac{4xy}{(1-x^2)(1-y^2)}\geqq0$　…⑦

⑦の分母を払い計算をすすめると

$(x+y)^2(1-x^2)(1-y^2)-4xy(1-xy)^2$

$=\cdots=(x-y)^2(xy-x-y-1)(xy+x+y-1)\geqq0$　…⑧

$0<A,\ B<\dfrac{\pi}{8}$ すなわち $0<x,\ y<\sqrt{2}-1$ のとき，

右図のように $(x,\ y)$ はともに

$xy-x-y-1<0,\ \ xy+x+y-1<0$

の領域にあるから⑧が成り立ち，遡って⑦⑥⑤が成り立つ。

証明了　■