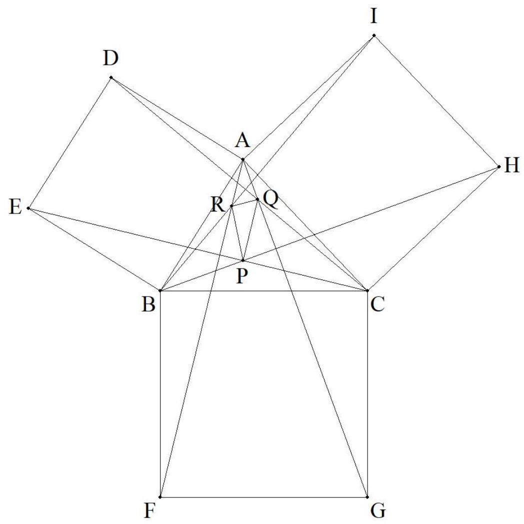
第 397 回追加問題

△ABCの外側に正方形 ADEB，BFGC，CHIA をつくる。
BH と CE の交点を P，CD と AG の交点を Q，AF と BI の交点を R とする。
△PQRの面積を，BC= a ，CA= b ，AB= c ，△ABC= S を用いて表せ。



解答　A $(c\cos B,\ c\sin B)$，B $(0,\ 0)$，C $(a,\ 0)$ とおき，座標平面で考える。

便宜上，$c\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}=p$，$c\sin B=\dfrac{2S}{a}=q$ とおく。$p^2+q^2=c^2$

正方形の各頂点は，

D $(p-q,\ p+q)$，E $(-q,\ p)$，F $(0,\ -a)$，G $(a,\ -a)$，H $(a+q,\ a-p)$，I $(p+q,\ a-p+q)$ となる。

直線 BH： $y=\dfrac{a-p}{a+q}x$ と直線 CE： $y=\dfrac{p}{-q-a}(x-a)$ の交点 P $\left(p,\ \dfrac{p(a-p)}{a+q}\right)=(x_1,\ y_1)$ とおく。

直線 CD： $y=\dfrac{p+q}{p-q-a}(x-a)$ と直線 AG： $y+a=\dfrac{q+a}{p-a}(x-a)$ の交点

Q $\left(\dfrac{aq(p+q)}{a^2-2ap+aq+c^2},\ \dfrac{a(a-p)(p+q)}{a^2-2ap+aq+c^2}\right)=(x_2,\ y_2)$ とおく。

直線 AF： $y+a=\dfrac{q+a}{p}x$ と直線 BI： $y=\dfrac{a-p+q}{p+q}x$ の交点 R $\left(\dfrac{ap(p+q)}{aq+c^2},\ \dfrac{ap(a-p+q)}{aq+c^2}\right)=(x_3,\ y_3)$ とおく。

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left|\ \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\ \right|=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|=$$

$$\frac{1}{2}\left|\left\{\frac{aq(p+q)}{a^2-2ap+aq+c^2}-p\right\}\left\{\frac{ap(a-p+q)}{aq+c^2}-\frac{p(a-p)}{a+q}\right\}-\left\{\frac{ap(p+q)}{aq+c^2}-p\right\}\left\{\frac{a(a-p)(p+q)}{a^2-2ap+aq+c^2}-\frac{p(a-p)}{a+q}\right\}\right|$$

$=|ap(-a^4p+3a^3p^2+ac^2p^2-4a^2p^3-c^2p^3+2ap^4+a^2c^2q-2a^3pq-2ac^2pq+3a^2p^2q$

$+a^3q^2-3a^2pq^2-c^2pq^2+3ap^2q^2+a^2q^3+aq^4)/2(a+q)(a^2+c^2-2ap+aq)(c^2+aq)|$

$p=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}$，$q=\dfrac{2S}{a}$ を代入すると，

（絶対値の中の分母） $=\dfrac{2(a^2+2S)(b^2+2S)(c^2+2S)}{a}$

（絶対値の中の分子） $=\dfrac{-1}{16a^3}\cdot(a^2-b^2+c^2)\{(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4-16S^2)(a^4+b^4-a^2c^2-b^2c^2+8S^2)+4a^2S(a^4$

$+2a^2b^2-3b^4-2a^2c^2+2b^2c^2+c^4-16S)\}=\bigstar$

ここで，$S^2=\dfrac{2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)}{16}$ であるから，

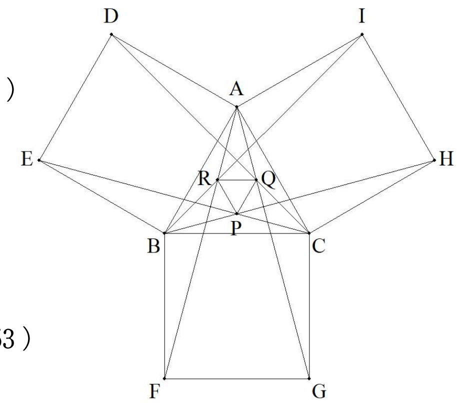
$$★= \frac{-1}{16a^3}\cdot(a^2-b^2+c^2)\left\{2a^2(a^2-b^2-c^2)\cdot\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2+c^2)+4a^2S\cdot 2(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{16a}(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2+8S)$$

よって，$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{|(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)|(a^2+b^2+c^2+8S)}{32(a^2+2S)(b^2+2S)(c^2+2S)}$ 答

補足 △ABCが鋭角三角形のときは，絶対値は不要である。

例



(1) BC=CA=AB= a のとき（右図），

$S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ （≒ $0.433013a^2$ ），$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{7\sqrt{3}-12}{4}a^2$ （≒ $0.0310889a^2$ ）

(2) BC= 15，CA= 14，AB= 13のとき，

$S = 84$，$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{6559245}{1147822}$ （≒ 5.71451 ）

(3) BC= 8，CA= 7，AB= 5のとき，

$S = 10\sqrt{3}$ （≒ 17.3205 ），$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{110(17520+6109\sqrt{3})}{4999763}$ （≒ 0.618253 ）

(4) BC= 7，CA= 5，AB= 3のとき，

$S = \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ （≒ 6.49519 ），$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{55(-366540+283337\sqrt{3})}{2607268}$ （≒ 2.62028 ）

（2021/1/17　ジョーカー）