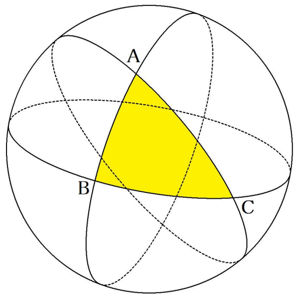
第397回

半径 r の球面上に△ABC（球面三角形）があり，その３つの内角をそれぞれA，B，Cとする。次の設問のとき，図のような△ABCの面積を求めよ。

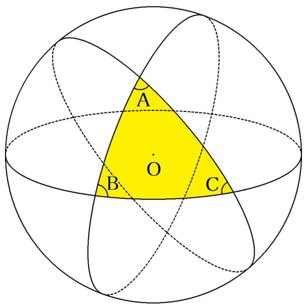
設問１　内角の和がA+B+C=210°のとき。

設問２　A=α，B=β，C=γ のとき。ただし，α，β，γ は弧度法とする。



解答

はじめに，半径が r の球面上に内角の大きさが A，B，C である球面三角形の面積 S は，$S=(A+B+C-\pi)r^2$ であることを証明する。



球の中心をＯとする。

球面上の２点A，Bについて，球を３点A，B，Ｏを通る平面で切断したとき，断面に現れる円を大円（単に大円ABで表す。）といい，大円上の弧ABを球面多角形においては辺ABという。

同一大円上にない３点A，B，Cに対して，球面三角形ABCを考える。

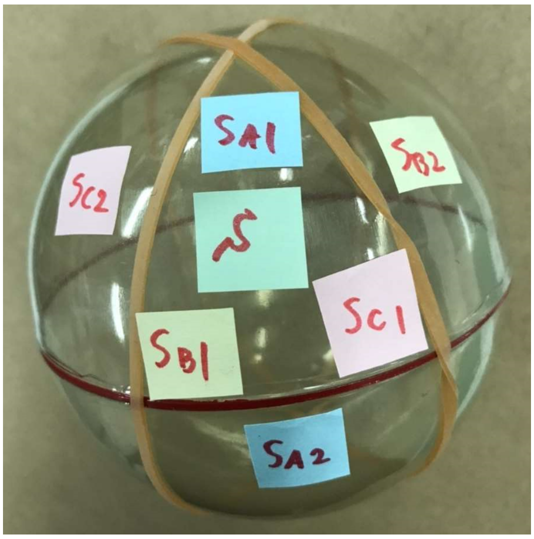
球面三角形ABCについて，∠BAC=∠Aを，点Aにおける大円ABと大円ACの接線の交角と定義する。

大円ABと大円ACによって，球は４分割される。

∠Aが属する領域の面積を S_A で表す。

S_A はAに比例して，A=π のとき，半球の表面積 $2\pi r^2$ になるから，

$$\mathrm{S_A}=\frac{A}{\pi}\cdot 2\pi r^2=2Ar^2$$



また，大円BC，大円CA，大円ABによって球面は８個の球面三角形に分割される。

しかも．Ｏに関して対称な球面三角形の面積は等しい。

$S_A=S_{A1}+S_{A2}$，$S_B=S_{B1}+S_{B2}$，$S_C=S_{C1}+S_{C2}$，

$S_{A1}=S_{B1}=S_{C1}=S$ とおくと，

$S+S_{A2}+S_{B2}+S_{C2}$ は半球の表面積に等しい。

$$S+(S_A-S)+(S_B-S)+(S_C-S)=2\pi r^2$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}(S_A+S_B+S_C)-\pi r^2=\frac{1}{2}(2Ar^2+2Br^2+2Cr^2)-\pi r^2=(A+B+C-\pi)r^2$$ 終

設問１　$210°=\frac{7}{6}\pi$ であるから，$S=\left(\frac{7}{6}\pi-\pi\right)r^2=\frac{\pi}{6}r^2$　答

設問２　A=α，B=β，C=γ であるから，$S=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)r^2$　答

（2021/2/10　ジョーカー）