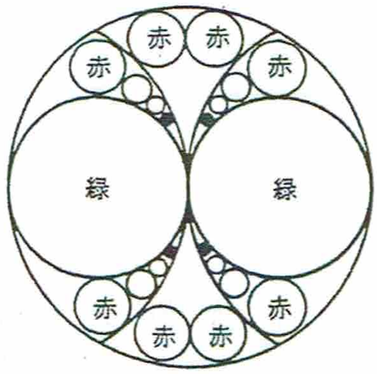
第 400 回

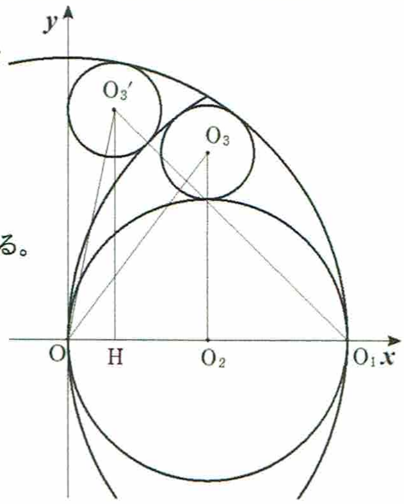
六ノ段

円の中に同じ半径で円弧を 2 個，その中心を通るように作り，
その間に緑，赤，黄，浅青，黒円の合計 22 個の円を入れる。
外側の円の直径を与えたとき，赤円の直径を求めよ。
出題者　　奥田津　女

術文（答）　赤円の直径は外側の円の直径÷ 6



解答　与えられた図形の大円の中心が原点になるように右のように座標平面上に置くと，x 軸，y 軸に関してそれぞれ対称であるから，第 1 象限の部分に記号を付けて考える。



大円，右側の大円弧，右側の緑円，それに外接する上側の赤円，右側の大円弧に外接する上側の赤円の中心（半径）をそれぞれ $O(r)$, $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$，$O_3'(r_3')$ とおく。大円の半径を 1 とすると，$r=r_1=1$ で，$r_2=\frac{1}{2}$は明らかである。

$\triangle O_3OO_2$ に三平方の定理を適ようすると，$(1-r_3)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(r_3+\frac{1}{2}\right)^2$

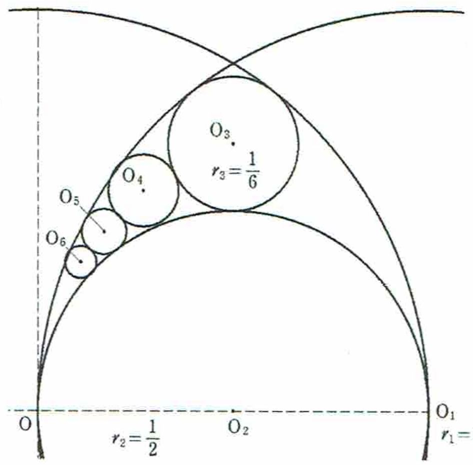
$\therefore r_3=\frac{1}{6}$

直角三角形 O_3OH と O_3HO_1 は O_3H が共通であるから，

$(1-r_3')^2-r_3'^2=(1+r_3')^2-(1-r_3')^2 \quad \therefore r_3'=\frac{1}{6}$

よって，赤円の半径は $r_3=r_3'=\frac{1}{6}$ となるから，赤円の直径は外側の円の直径の $\frac{1}{6}$　答

補足　右図のように，黄，浅青，黒円の中心（半径）をそれぞれ $O_4(r_4)$，$O_5(r_5)$，$O_6(r_6)$ とおく。



デカルトの円定理 $\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_1}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}+\frac{1}{r_1^2}\right)$

に，$r_1=1$，$r_2=\frac{1}{2}$，$r_3=\frac{1}{6}$ を代入して，$r_4=\frac{1}{11}$ が得られる。

同様に，$\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}-\frac{1}{r_1}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_4^2}+\frac{1}{r_5^2}+\frac{1}{r_1^2}\right)$ より，

$r_5=\frac{1}{18}$

$\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_5}+\frac{1}{r_6}-\frac{1}{r_1}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_5^2}+\frac{1}{r_6^2}+\frac{1}{r_1^2}\right)$ より，$r_6=\frac{1}{27}$

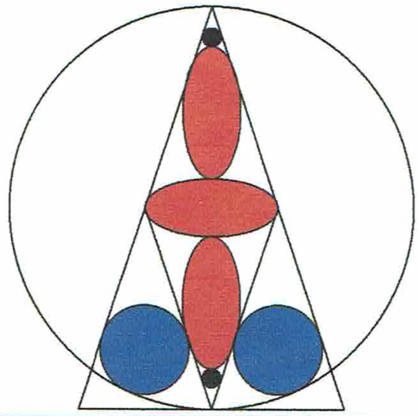
よって，赤，黄，浅青，黒円の半径は，順に，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{11}$，$\frac{1}{18}$，$\frac{1}{27}$となる。

なお，一般項は，$r_n=\dfrac{1}{n^2-2n+3}$ （$n\geqq 3$）となる。

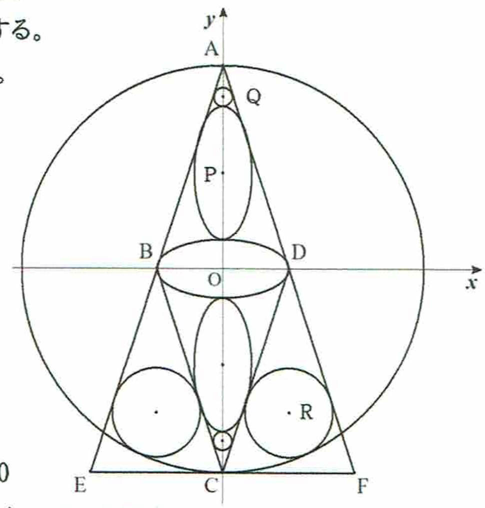
七ノ段

円内にひし形（そのひし形の対角線は，互いに垂直な直径上にあるように）を入れる。そのひし形内に3個の等しい楕円を入れる。
円の直径が与えられたとき，楕円の短軸の長さの最大値を求めよ。
出題者　足立権左衛門孝定

術文（答）　短軸の長さは円の直径÷7



解答　図のように記号を付け，与えられた図形を座標平面において考える。
ひし形ABCDの対角線のうち短い方BDを x 軸，長い方ACを y 軸とする。
楕円の長軸を $2a$，短軸を $2b$，円の半径を r，Dの座標を $(c,\ 0)$ とおく。



A$(0,\ r)$ であるから，直線ADの方程式は，$\dfrac{x}{c}+\dfrac{y}{r}=1$　…①

楕円Oの方程式は，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　…②

楕円Pの方程式は，$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{(y-a-b)^2}{a^2}=1$　…③

①，②から x を消去すると，$\dfrac{\left(c-\dfrac{c}{r}y\right)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

分母を払って整理すると，$(b^2c^2+a^2r^2)y^2-2b^2c^2ry+b^2r^2(c^2-a^2)=0$

この y についての2次方程式の判別式を D とおくと，①，②は接するから，$D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=b^4c^4r^2-(b^2c^2+a^2r^2)\cdot b^2r^2(c^2-a^2)=a^2b^2r^2(b^2c^2+a^2r^2-c^2r^2)=0$ より，$c^2=\dfrac{a^2r^2}{r^2-b^2}$　…④

同様に，①，③から x を消去すると，$\dfrac{\left(c-\dfrac{c}{r}y\right)^2}{b^2}+\dfrac{(y-a-b)^2}{a^2}=1$

分母を払って整理すると，$(a^2c^2+b^2r^2)y^2-2r(a^2c^2+ab^2r+b^3r)y+r^2(2ab^3+b^4+a^2c^2)=0$

この y についての2次方程式の判別式を D' とおくと，①，②は接するから，$D'=0$ である。

$\dfrac{D'}{4}=r^2(a^2c^2+ab^2r+b^3r)^2-(a^2c^2+b^2r^2)\cdot r^2(2ab^3+b^4+a^2c^2)$

$\quad=a^2b^2r^2(-2abc^2-b^2c^2+2ac^2r+2bc^2r+b^2r^2-c^2r^2)=0$ より，$abr\neq 0$ であるから

$\therefore -2abc^2-b^2c^2+2ac^2r+2bc^2r+b^2r^2-c^2r^2=0$

これに④を代入して整理すると，$(a+b)r^2(2a^2-ab+b^2-ar+br)=0$

$(a+b)r^2\neq 0$ であるから，$2a^2-ab+b^2-ar+br=0$

b について解くと，$b=\dfrac{1}{2}\left(a-r\pm\sqrt{-7a^2+2ar+r^2}\right)$

$a-r<0$ で，$b>0$ より，$b=\dfrac{1}{2}\left(a-r+\sqrt{-7a^2+2ar+r^2}\right)=f(a)$ とおき，b の最大値を調べる。

定義域は，$a>0$，$b>0$ より，$0<a<\frac{1}{2}r$

この範囲で，$f'(a)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{-14a+2r}{2\sqrt{-7a^2+2ar+r^2}}\right)=0$ とおくと，$a=\frac{2}{7}r$

また，$f''(a)=-\frac{4r^2}{(-7a^2+2ar+r^2)^{\frac{3}{2}}}<0$ であるから，$a=\frac{2}{7}r$ のとき，$b=f(a)$ は極大かつ最大となる。

よって，b の最大値は，$f\left(\frac{2}{7}r\right)=\frac{1}{7}r$　$\therefore 2b=\frac{2r}{7}$

よって，楕円の短軸の長さの最大値は，円の直径の $\frac{1}{7}$ である。答

補足

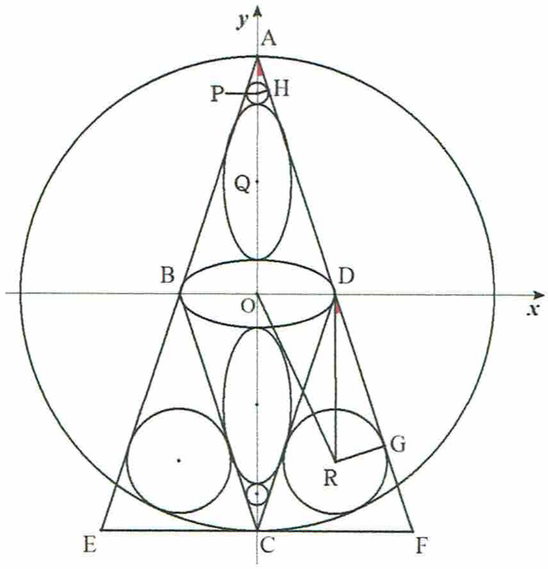
このとき，長軸：短軸＝2:1 である。

④より，$c=\frac{r}{2\sqrt{3}}$ であるから，$\tan\angle DAO=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\therefore \sin\angle DAO=\frac{1}{\sqrt{13}}$

∠PAH＝∠RDG＝∠DAO である。

黒円，青円の半径をそれぞれ r_1，r_2 とおく。



$\mathrm{AP}=\frac{r_1}{\sin\angle PAH}=\sqrt{13}\,r_1$

$\mathrm{AO}=\mathrm{AP}+r_1+2a+b$ より，$r=\sqrt{13}\,r_1+r_1+2\cdot\frac{2}{7}r+\frac{r}{7}$

$\therefore r_1=\frac{\sqrt{13}-1}{42}r$

次に，△ORDについて，$\mathrm{OR}=r-r_2$，$\mathrm{DR}=\frac{r_2}{\sin\angle RDG}=\sqrt{13}\,r_2$，$\mathrm{DO}=c=\frac{1}{2\sqrt{3}}r$

△ORD に三平方の定理を適用すると，$(r-r_2)^2=(\sqrt{13}\,r_2)^2+\left(\frac{r}{2\sqrt{3}}\right)^2$　$r_2>0$ より，$\therefore r_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{12}r$

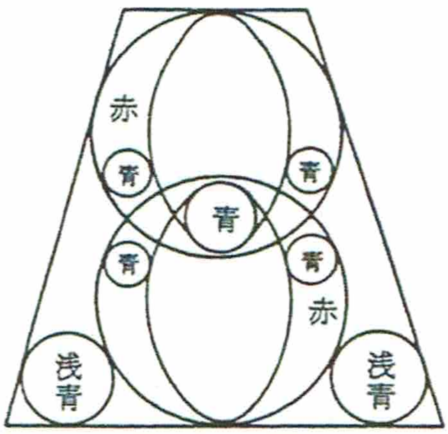
このとき，$r_1:r_2=\frac{\sqrt{13}-1}{42}r : \frac{\sqrt{13}-1}{12}r=2:7$

よって，黒円の半径：$\frac{\sqrt{13}-1}{42}r$，青円の半径：$\frac{\sqrt{13}-1}{12}r$　黒径：青径＝2:7

九ノ段

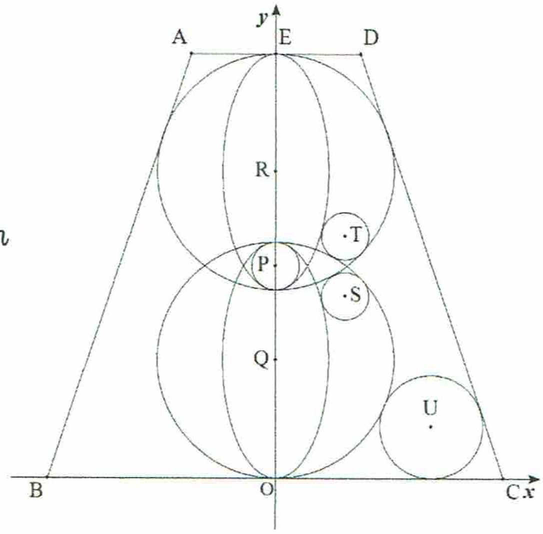
等脚台形内に 2 個の等楕円と，2 個の等赤円を入れる。
その中へ 5 個の等青円と 2 個の浅青円とを入れる。
台形の高さが与えられたとき，青円の直径の最大値を
求めよ。
主題者　臼井孫兵衛義信

術文（答）　青円の直径は台形の高さ÷9



解答

図のように記号を付け，座標平面におく。
BC を x 軸，BC, AD の中点をそれぞれ O，E とし，
OE を y 軸とする。
与えられた図形は y 軸に関して対称であるから，$x \geqq 0$
の部分にある円を考える。
赤円（Q，R），青円（P，S，T），浅青円（U）の半径をそれぞれ
r_1，r_2，r_3 とする。
楕円の長軸を $2b$，短軸を $2a$（$b>a$）とすると，
赤円の直径は楕円の長軸に等しいから，$2r_1=2b$ より，$\therefore r_1=b$
楕円に囲まれる青円（P）の直径が最大になるのは，
楕円の長軸の端で曲率円になるときであるから，$r_2=\dfrac{a^2}{b}$



次に，円 S の半径も $\dfrac{a^2}{b}$ になることから，$\dfrac{b}{a}=\sqrt{5}$ となる。（*）

このとき台形の高さを h とすると，$h=4b-\dfrac{2a^2}{b}$ であるから，

$$\frac{r_2}{h}=\frac{\dfrac{2a^2}{b}}{4b-\dfrac{2a^2}{b}}=\frac{a^2}{2b^2-a^2}=\frac{1}{2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-1}=\frac{1}{9}$$ よって，青円の直径は台形の高さの $\dfrac{1}{9}$ 答

（*）の証明

$r_2=\dfrac{a^2}{b}$，R$(0,\ 3b-2r_2)$，Q$(0,\ b)$ である。S$(s,\ t)$ とおく。（$s>0$，$t>0$）

$\mathrm{SR}=\sqrt{s^2+(3b-2r_2-t)^2}=b+r_2$ …①

$\mathrm{SQ}=\sqrt{s^2+(b-t)^2}=b-r_2$ …②

①$^2-$②^2 より，$(4b-2r_2-2t)(2b-2r_2)=4br_2$

$t=2b-r_2-\dfrac{br_2}{b-r_2}$　これに，$r_2=\dfrac{a^2}{b}$ を代入して，$t=\dfrac{a^4-4a^2b^2+2b^4}{b(b^2-a^2)}$

これと①より，$s=\dfrac{a\sqrt{(b^2-2a^2)(2b^2-a^2)}}{b^2-a^2}$

円 S の方程式は，$(x-s)^2+(y-t)^2={r_2}^2$ …③

楕円 Q の方程式は，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-b)^2}{b^2}=1$ …④

③，④から x を消去すると，

$$(b^2-a^2)^2y^4+4b(b^2-a^2)(a^2-bt)y^3+2b^2(2a^4+a^2{r_2}^2-b^2{r_2}^2+a^2s^2+b^2s^2-4a^2bt-a^2t^2+3b^2t^2)y^2$$
$$-4b^3(a^2{r_2}^2+a^2s^2-b{r_2}^2t+bs^2t-a^2t^2+bt^3)y+b^4({r_2}^2-s^2-t^2)^2=0$$

3 次の項を消すために，$y=\dfrac{b(z-a^2+bt)}{b^2-a^2}$ を代入し整理すると，$z^4+l+mz+n=0$ …⑤となる。

ただし，$l=-2(a^4-a^2{r_2}^2+b^2{r_2}^2-a^2s^2-b^2s^2-2a^2bt+a^2t^2)$，$m=-8a^2bs^2(b-t)$，

$n=a^8-2a^6{r_2}^2+2a^4b^2{r_2}^2+a^4{r_2}^4-2a^2b^2{r_2}^4+b^4{r_2}^4-2a^6s^2+6a^4b^2s^2-2a^4{r_2}^2s^2+4a^2b^2{r_2}^2s^2-2b^4{r_2}^2s^2$

$+a^4s^4-2a^2b^2s^4+b^4s^4-4a^6bt+4a^4br_2{}^2t-4a^2b^3r_2{}^2t-4a^4bs^2t-4a^2b^3s^2t+2a^6t^2+4a^4b^2t^2-2a^4r_2{}^2t^2$

$+2a^2b^2r_2{}^2t^2+2a^4s^2t^2+2a^2b^2s^2t^2-4a^4bt^3+a^4t^4$　…これら3式を⑥とする。

円と楕円は接するので，⑤は重解をもつ。

4次方程式⑤が重解をもつ条件は，$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$ であるから，

これに，⑥と，$r_2=\dfrac{a^2}{b}$，$s=\dfrac{a\sqrt{(b^2-2a^2)(2b^2-a^2)}}{b^2-a^2}$，$t=\dfrac{a^4-4a^2b^2+2b^4}{b(b^2-a^2)}$ を代入して整理すると，

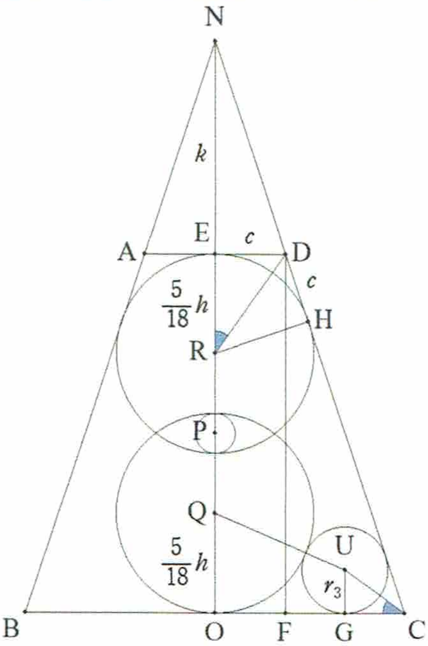
$4096a^{14}(7a^2-8b^2)(a^2-2b^2)^4(2a^2-b^2)^4(5a^2-b^2)=0$

題意に適するのは，$5a^2-b^2=0$　*i.e.*　$b=\sqrt{5}\,a$　■

補足　等脚台形の上底 $2c$ と高さ h が与えられた場合の浅青円の半径 r_3 について

D，U からから OC に下した垂線の足をそれぞれ F，G，R からCDに下した垂線の足をH，BAとCDの交点をN，

NE$=k$ とおく。△NEDに三平方の定理を適用して，ND$=\sqrt{k^2+c^2}$



$h=4b-2r_2=9\cdot 2r_2$ より，$b=r_1=5r_2$，$h=18r_2$　$\therefore\ r_1=\mathrm{ER}=\dfrac{5}{18}h$

△NED∽△NHRより，$\dfrac{c}{k}=\dfrac{\frac{5}{18}h}{\sqrt{k^2+c^2}+c}$　$\therefore\ k=\dfrac{180c^2h}{25h^2-324c^2}$

△NED∽△NOCより，$\dfrac{c}{k}=\dfrac{OC}{k+h}$　$\therefore\ \mathrm{OC}=\dfrac{c(k+h)}{k}=\dfrac{25k^2-144c^2}{180c}$

△DRE∽△UCGより，$\dfrac{c}{\frac{5}{18}h}=\dfrac{r_3}{GC}$　$\therefore\ \mathrm{GC}=\dfrac{5h}{18c}r_3$

OC=OG+GC であるから，$\dfrac{25k^2-144c^2}{180c}=2\sqrt{\dfrac{5}{18}h\cdot r_3}+\dfrac{5hr_3}{18c}$

分母を払い，$\sqrt{5hr_3}=R$ とおくと，$10R^2+60\sqrt{2}\,cR-25h^2+144c^2=0$

$$R=\frac{-30\sqrt{2}\,c\pm\sqrt{250h^2+360c^2}}{10}$$

$R>0$ より，$R=\dfrac{-30\sqrt{2}\,c+\sqrt{250h^2+360c^2}}{10}=\dfrac{\sqrt{25h^2+36c^2}-6\sqrt{5}\,c}{\sqrt{10}}=\sqrt{5hr_3}$ より，

$r_3=\dfrac{(\sqrt{25h^2+36c^2}-6\sqrt{5}\,c)^2}{50h}$　答

(2021/5/3　ジョーカー)