(1)　Z を整数の集合とする。

集合 $A=\{a^2+b^2+c^2+d^2 \mid a,b,c,d\in Z\}$ は，積の演算について閉じていることを証明せよ。

（証明）まず，$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$ である。

$x,y\in A$ に対して，$x={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2,\ y={y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2+{y_4}^2$ とおける。$x_i,y_i\in Z(i=1,2,3,4)$

$$xy=({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2)({y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2+{y_4}^2)$$

$$=({x_1}^2+{x_2}^2)({y_1}^2+{y_2}^2)+({x_1}^2+{x_2}^2)({y_3}^2+{y_4}^2)+({x_3}^2+{x_4}^2)({y_1}^2+{y_2}^2)+({x_3}^2+{x_4}^2)({y_3}^2+{y_4}^2)$$

$$=(\underset{\text{ア}}{x_1y_1+x_2y_2})^2+(\underset{\text{イ}}{x_1y_2-x_2y_1})^2+(\underset{\text{ウ}}{x_1y_4+x_2y_3})^2+(\underset{\text{エ}}{x_1y_3-x_2y_4})^2$$

$$+(\underset{\text{オ}}{-x_3y_2-x_4y_1})^2+(\underset{\text{カ}}{-x_3y_1+x_4y_2})^2+(\underset{\text{キ}}{x_3y_3+x_4y_4})^2+(\underset{\text{ク}}{x_3y_4-x_4y_3})^2$$

$$=(\underset{\text{ア}}{x_1y_1+x_2y_2}+\underset{\text{キ}}{x_3y_3+x_4y_4})^2-2(x_1y_1+x_2y_2)(x_3y_3+x_4y_4)$$

$$+(\underset{\text{イ}}{x_1y_2-x_2y_1}+\underset{\text{ク}}{x_3y_4-x_4y_3})^2-2(x_1y_2-x_2y_1)(x_3y_4-x_4y_3)$$

$$+(\underset{\text{エ}}{x_1y_3-x_2y_4}\underset{\text{カ}}{-x_3y_1+x_4y_2})^2-2(x_1y_3-x_2y_4)(-x_3y_1+x_4y_2)$$

$$+(\underset{\text{ウ}}{x_1y_4+x_2y_3}\underset{\text{オ}}{-x_3y_2-x_4y_1})^2-2(x_1y_4+x_2y_3)(-x_3y_2-x_4y_1)$$

$$=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2-2(x_1x_3y_1y_3+x_1x_4y_1y_4+x_2x_3y_2y_3+x_2x_4y_2y_4)$$

$$+(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2-2(x_1x_3y_2y_4-x_1x_4y_2y_3-x_2x_3y_1y_4+x_2x_4y_1y_3)$$

$$+(x_1y_3-x_2y_4-x_3y_1+x_4y_2)^2-2(-x_1x_3y_1y_3+x_1x_4y_2y_3+x_2x_3y_1y_4-x_2x_4y_2y_4)$$

$$+(x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2-x_4y_1)^2-2(-x_1x_3y_2y_4-x_1x_4y_1y_4-x_2x_3y_2y_3-x_2x_4y_1y_3)$$

$$=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2+(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2$$

$$+(x_1y_3-x_2y_4-x_3y_1+x_4y_2)^2+(x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2-x_4y_1)^2\in A$$

よって，集合 A は積の演算について閉じている。■

(2)　$f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3-3abc$ のとき，

$f(1,2,3)f(4,5,6)=f(a,b,c)$ を満たす正の整数 a,b,c の値を一組求めよ。

はじめに，Z を整数の集合とするとき，集合 B$=\{n \mid n=a^3+b^3+c^3-3abc,a\in Z,b\in Z,c\in Z\}$ は，積の演算について閉じていることを証明する。

（証）

任意の $m,n\in B$ に対して，$m={m_1}^3+{m_2}^3+{m_3}^3-3m_1m_2m_3$，$n={n_1}^3+{n_2}^3+{n_3}^3-3n_1n_2n_3$ とおく。（ただし，

$m_i, n_i \in Z(i=1,2,3)$)

一般に，$m_1{}^3+m_2{}^3+m_3{}^3-3m_1m_2m_3=(m_1+m_2+m_3)(m_1{}^2+m_2{}^2+m_3{}^2-m_2m_3-m_3m_1-m_1m_2)$

$=(m_1+m_2+m_3)(m_1+\omega m_2+\omega^2 m_3)(m_1+\omega^2 m_2+\omega m_3)$ であるから，(*)

（ただし$\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$）

$$mn=(m_1+m_2+m_3)(m_1+\omega m_2+\omega^2 m_3)(m_1+\omega^2 m_2+\omega m_3)\times(n_1+n_2+n_3)(n_1+\omega n_2+\omega^2 n_3)(n_1+\omega^2 n_2+\omega n_3)$$

$$=(m_1+m_2+m_3)(n_1+n_2+n_3)\times(m_1+\omega m_2+\omega^2 m_3)(n_1+\omega^2 n_2+\omega n_3)\times(m_1+\omega^2 m_2+\omega m_3)(n_1+\omega n_2+\omega^2 n_3)$$
$$=\{(m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3)+(m_1n_3+m_2n_1+m_3n_2)+(m_1n_2+m_2n_3+m_3n_1)\}$$

$$\times\{(m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3)+\omega(m_1n_3+m_2n_1+m_3n_2)+\omega^2(m_1n_2+m_2n_3+m_3n_1)\}$$

$$\times\{(m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3)+\omega^2(m_1n_3+m_2n_1+m_3n_2)+\omega(m_1n_2+m_2n_3+m_3n_1)\}$$

$$=(m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3)^3+(m_1n_3+m_2n_1+m_3n_2)^3+(m_1n_2+m_2n_3+m_3n_1)^3$$

$$-3(m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3)(m_1n_3+m_2n_1+m_3n_2)(m_1n_2+m_2n_3+m_3n_1)\in B$$

よって，積の演算について閉じている。■
従って，次の公式が得られる。

> （公式）$f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3-3abc$ のとき，
>
> $f(m_1,m_2,m_3)f(n_1,n_2,n_3)=f(m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3, m_1n_3+m_2n_1+m_3n_2, m_1n_2+m_2n_3+m_3n_1)$

これに，$m_1=1, m_2=2, m_3=3, n_1=4, n_2=5, n_3=6$ を代入すると，

$f(1,2,3)f(4,5,6)=f(1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6, 1\cdot6+2\cdot4+3\cdot5, 1\cdot5+2\cdot6+3\cdot4)=f(32,29,29)$ であるから，求める正の整数 a,b,c の値の一組は，$a=32, b=29, c=29$ … (答)

(*) $\omega+\omega^2=-1, \omega^3=1$ に注意して，$(m_1+\omega m_2+\omega^2 m_3)(m_1+\omega^2 m_2+\omega m_3)$ を展開すると

$m_1{}^2+m_2{}^2+m_3{}^2-m_2m_3-m_3m_1-m_1m_2$ となる。

(2021/4/22　ジョーカー)