第 401 回

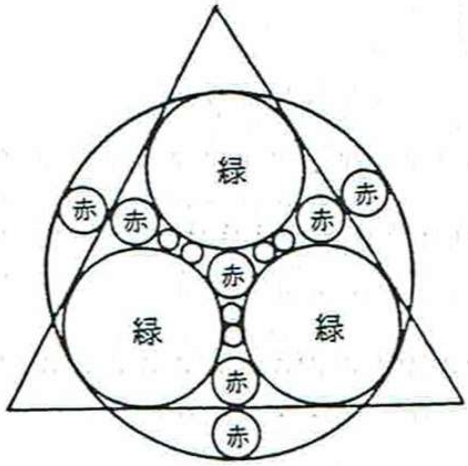
十ノ段

正三角形と外円との間に緑，赤，白円併せて 16 個を入れる。

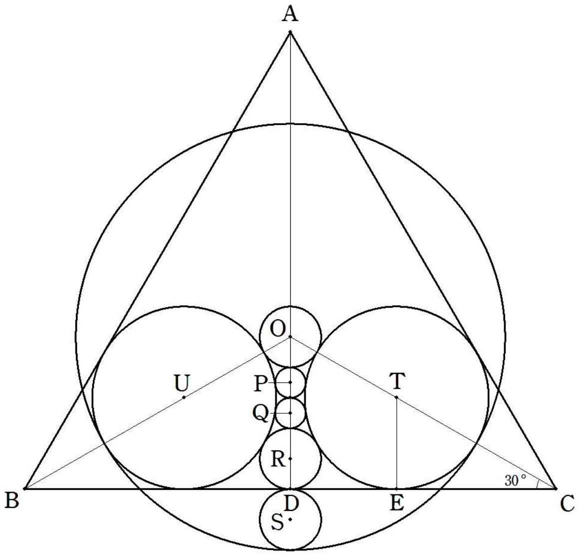
正三角形の内接円の半径が与えられたとき白円の直径を求めよ。

出題者　田辺捨次重利

術文（答）　白円の半径は正三角形の内接円の半径÷10



解答　図のように記号を付ける。



正三角形の重心（内心）を O とすると，与えられた図形は直線 OA，OB，OC に関して対称であるから，△OBC の部分で考える。

正三角形の内接円の半径を 1 とする。

すなわち，OD＝ 1 として考える。

△ODC は 30° を内角にもつ直角三角形であるから，

DC＝ $\sqrt{3}$ ，OC＝ 2 である。

緑円，赤円，白円の半径をそれぞれ r_1 ， r_2 ， r_3 とする。

TE＝ r_1 であるから，EC＝ $\sqrt{3}r_1$ ，TC＝ $2r_1$

OC＝ 2 であるから， $r_2+r_1+2r_1=2$ 　…①

DC＝ $\sqrt{3}$ であるから， $2\sqrt{r_1 r_2}+\sqrt{3}r_1=\sqrt{3}$ 　…②

OD＝ 1 であるから， $3r_2+4r_3=1$ 　…③

①，②を連立させて解くと， $r_1=\dfrac{3}{5}$ ， $r_2=\dfrac{1}{5}$ 　これと③から， $r_3=\dfrac{1}{10}$

よって白円の半径は正三角形の内接円の半径の $\dfrac{1}{10}$ である。　答

補足　正三角形の 1 辺は，2 DC＝ $2\sqrt{3}$

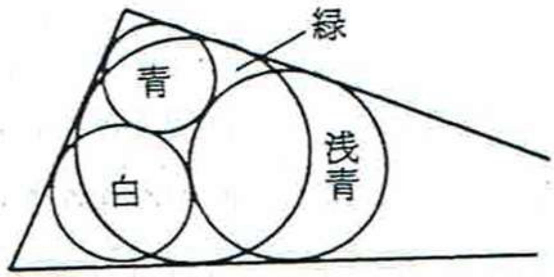
白円は緑円だけでなく，赤円にも接する。

外円の半径は， $r_2+2r_1=\dfrac{7}{5}$ ，よって，外円，内接円，緑円，赤円，白円の半径の比は， 14:10:6:2:1

第11問

三角形の2辺に接し，かつ互いに外接する3個の円（青，白，浅青）がある。
この三角形の内接円を緑円とする。青，白，浅青の直径が与えられたとき緑円の直径を求めよ。

出題者　志知何某貴忠



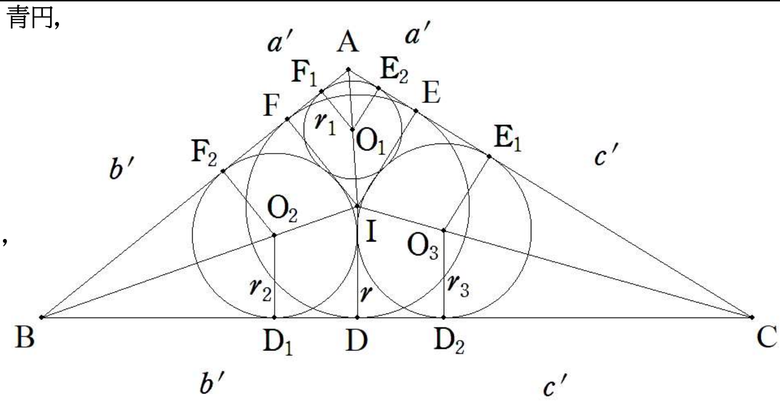
術文（答）　緑円径は，$\dfrac{2\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a+b+c}}$

ただし，青の直径を a，白の直径を b，浅青の直径を c とする。

解答　三角形を ABC とし，緑円（内接円），青円，白円，浅青円の中心（半径）をそれぞれ $\mathrm{I}(r)$，$\mathrm{O}_1(r_1)$，$\mathrm{O}_2(r_2)$，$\mathrm{O}_3(r_3)$ とおく。

（ただし，$r_1=\dfrac{a}{2}$，$r_2=\dfrac{b}{2}$，$r_3=\dfrac{c}{2}$ ）

また，図のように記号を付け，AE＝AF＝ a'，BF＝BD＝ b'，CD＝CE＝ c' とおく。



まず，$r^2(a'+b'+c')=a'b'c'$　…①

を証明する。

$\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\tan\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)$

$$\frac{\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}}{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}\quad \therefore \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$$

これに，$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{a'}$，$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{b'}$，$\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{c'}$ を代入し，両辺に $a'b'c'$ を掛けると，①が得られる。■

次に，$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r_2}{BD_1}=\dfrac{r}{b'}$ より，$\mathrm{BD_1}=\dfrac{r_2}{r}b'$　同様に，$\mathrm{D_2C}=\dfrac{r_3}{r}c'$

また，$\mathrm{D_1D_2}=\sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_3-r_2)^2}=2\sqrt{r_2r_3}$

これらを，BC＝BD$_1$＋D$_1$D$_2$＋D$_2$C に代入すると，$\dfrac{r_2}{r}b'+2\sqrt{r_2r_3}+\dfrac{r_3}{r}c'=b'+c'$

$\therefore 2r\sqrt{r_2r_3}=b'(r-r_2)+c'(r-r_3)$　…②

同様に，CA＝CE$_1$＋E$_1$E$_2$＋E$_2$A，AB＝AF$_1$＋F$_1$F$_2$＋F$_2$B であるから，

$2r\sqrt{r_3r_1}=c'(r-r_3)+a'(r-r_1)$　…③，$2r\sqrt{r_1r_2}=a'(r-r_1)+b'(r-r_2)$　…④

③+④−②より，$2r(\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2}-\sqrt{r_2r_3})=2a'(r-r_1)$　$\therefore a'=\dfrac{r(\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2}-\sqrt{r_2r_3})}{r-r_1}$

同様に，$b'=\dfrac{r(\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}-\sqrt{r_3r_1})}{r-r_2}$，$c'=\dfrac{r(\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}-\sqrt{r_1r_2})}{r-r_3}$

ここで便宜的に，

$\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2}-\sqrt{r_2r_3}=d_1$，$\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}-\sqrt{r_3r_1}=d_2$，$\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}-\sqrt{r_1r_2}=d_3$　…⑤とおくと，

$a'=\dfrac{rd_1}{r-r_1}$，$b'=\dfrac{rd_2}{r-r_2}$，$c'=\dfrac{rd_3}{r-r_3}$

これらを①に代入すると，$r^2\left(\dfrac{rd_1}{r-r_1}+\dfrac{rd_2}{r-r_2}+\dfrac{rd_3}{r-r_3}\right)=\dfrac{rd_1}{r-r_1}\cdot\dfrac{rd_2}{r-r_2}\cdot\dfrac{rd_3}{r-r_3}$

分母を払って整理すると，

$(d_1+d_2+d_3)r^2-\{d_1(r_2+r_3)+d_2(r_3+r_1)+d_3(r_1+r_2)\}r+d_1r_2r_3+d_2r_3r_1+d_3r_1r_2-d_1d_2d_3=0$

この r についての２次方程式の係数に⑤を代入して計算すると，

$d_1+d_2+d_3=\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2}$

$d_1(r_2+r_3)+d_2(r_3+r_1)+d_3(r_1+r_2)=2\sqrt{r_1r_2r_3}(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3})$

$d_1r_2r_3+d_2r_3r_1+d_3r_1r_2-d_1d_2d_3=2r_1r_2r_3$ であるから，

$(\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2})r^2-2\sqrt{r_1r_2r_3}(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3})r+2r_1r_2r_3=0$

両辺を $r_1r_2r_3$ で割り，$\dfrac{r}{\sqrt{r_1r_2r_3}}=x$ とおくと，$(\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2})x^2-2(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3})x+2=0$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\pm\sqrt{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3})^2-2(\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2})}}{\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2}}$$

$$=\frac{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\pm\sqrt{r_1+r_2+r_3}}{\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2}}=\frac{2}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\mp\sqrt{r_1+r_2+r_3}}=\frac{r}{\sqrt{r_1r_2r_3}}$$ より，

$$r=\frac{2\sqrt{r_1r_2r_3}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\mp\sqrt{r_1+r_2+r_3}}=\frac{2\sqrt{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{c}{2}}}{\sqrt{\dfrac{a}{2}}+\sqrt{\dfrac{b}{2}}+\sqrt{\dfrac{c}{2}}\mp\sqrt{\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\mp\sqrt{a+b+c}}$$

最後に，複号を決める。

△ABCが正三角形のとき，$a=b=c$ であるから，

$$r=\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a+b+c}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}a=\frac{3+\sqrt{3}}{3}r_1>r_1$$ （適）

$$r=\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b+c}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}a=\frac{3-\sqrt{3}}{3}r_1<r_1$$ （不適）

よって，$r=\dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a+b+c}}$ であるから，求める緑円の直径は，

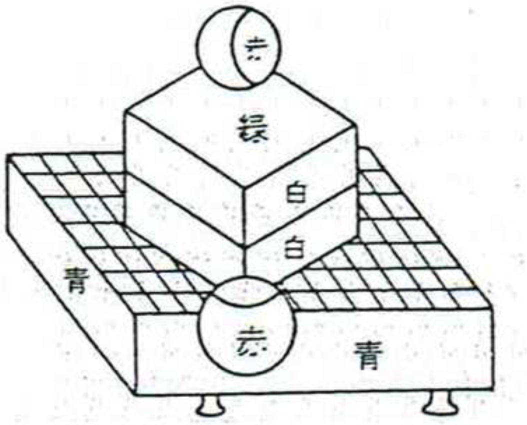
$$2r=\frac{2\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a+b+c}}$$ 答

第12問

将棋盤の上に直方体の餅を置き，この餅の上から焼いた砲丸で盤に接するまで穴をあける。

餅の底面は盤に接している。餅の高さと砲丸の直径が与えられたとき穴の容積を求めよ。

出題者　磯月関女恒子



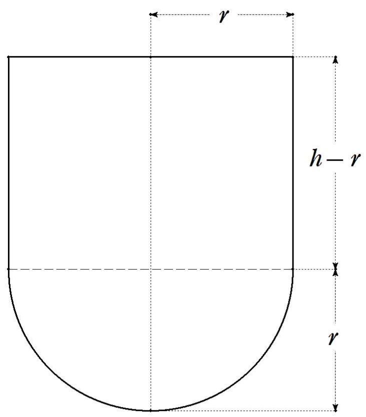
術文（答）　容積は，$\dfrac{\pi(2r)^2(3h-r)}{12}$

砲丸の直径を $2r$，餅の高さを h とする。

参考文献　　「岐阜県の算額の解説」　髙木重治　著

解答　穴の容積Ｖは，半径 r，高さ $(h-r)$ の円柱の体積と，半径 r の半球の体積を合わせたものに等しいから，

$$V=\pi r^2(h-r)+\frac{4}{3}\pi r^3\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}r^2(3h-r)=\frac{\pi(2r)^2(3h-r)}{12}$$ 答



【砲丸の中心を通る盤に垂直な断面図】

（2021/5/31　ジョーカー）