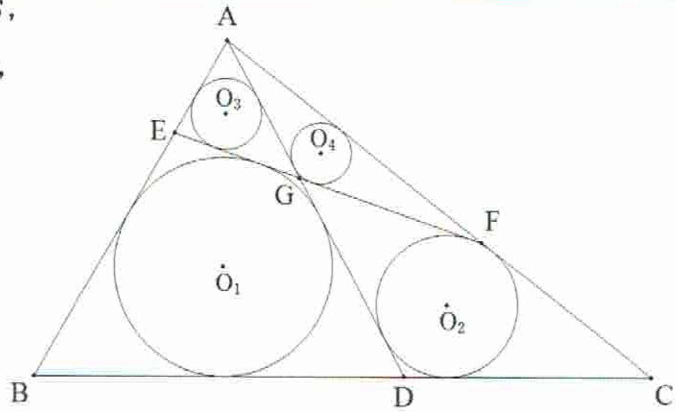
第403回　追加問題

BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$である△ABCの面積をS，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$とする。BC上に点Dをとり，△ABC，△ABD，△ADCの内接円をそれぞれO(r)，O$_1(r_1)$，O$_2(r_2)$とする。2円O$_1$，O$_2$の共通外接線（BCでない方）とAB，AC，ADとの交点をそれぞれE，F，Gとし，△AEG，△AGFの内接円をそれぞれO$_3(r_3)$，O$_4(r_4)$とする。このとき，



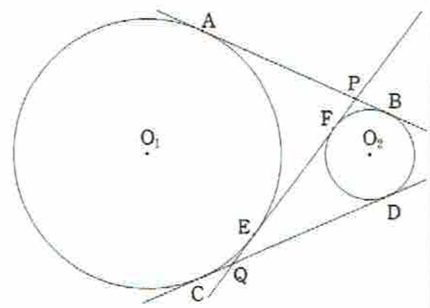
(1)　$S=\dfrac{ar_1r_2}{r_1+r_2-r}$を示せ。

(2)　$\dfrac{a}{r}+\dfrac{s-a}{r_3}=\dfrac{c}{r_1}+\dfrac{s-c}{r_2}$，$\dfrac{a}{r}+\dfrac{s-a}{r_4}=\dfrac{b}{r_2}+\dfrac{s-b}{r_1}$を示せ。

(3)　AD$=b\cdot\dfrac{r_1}{r}+c\cdot\dfrac{r_2}{r}-a\cdot\dfrac{r_1}{r}\cdot\dfrac{r_2}{r}$を示せ。

(4)　点DがBからCまで動くとき（D≒B，D≒C），点Gの軌跡を求めよ。

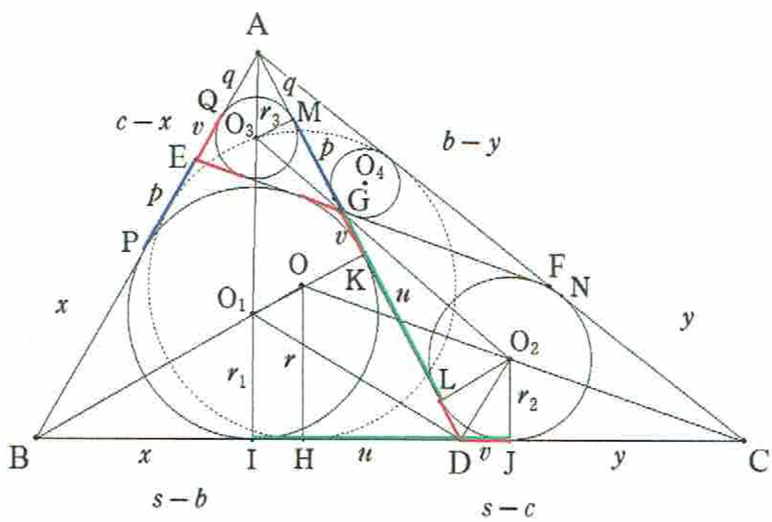
補題　右図で，一方が他方の外部にある2円の共通外接線と共通内接線の交点をP，Qとすると，PB=PF=QC=QE，PA=PE=QD=QFである。



証明　PB=PF$=p$，QC=QE$=q$とおく。
AB=AP+PB=PE+PF=FE+$2p$
CD=CQ+QD=QE+QF=$2q$+FE
AB=CDであるから，FE+$2p=2q$+FE　$\therefore\ p=q$
よって，PB=PF=QC=QE
PA=AB−PB=CD−QC=QDであるから，PA=PE=QD=QF　終

解答

(1)　図のように記号をつける。
補題より，QE$=$GK$=$DJ$=v$，MG$=$EP$=p$，GL$=$ID$=u$である。
また，BH$=s-b$，HC$=s-c$，
$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$r=\dfrac{S}{s}$
である。



△O$_1$BI∽△OBHより，$\dfrac{r_1}{x}=\dfrac{r}{s-b}$

$\therefore\ x=\dfrac{r_1}{r}(s-b)=\dfrac{r_1 s}{S}(s-b)$　…①

同様に，△O$_2$CJ∽△OCHより，

$y=\dfrac{r_2}{r}(s-c)=\dfrac{r_2 s}{S}(s-c)$　…②

BI=BP= x とおくと，AP=AK= $c-x$

ID=KD= u とおくと，AD=AK+KD= $(c-x)+u$ …③

CJ=CN= y とおくと，AN=AL= $b-y$

DJ=DL= v とおくと，AD=AL+LD= $(b-y)+v$ …④

③，④より，$c-x+u=b-y+v$ $\therefore u-v=b-c+x-y$ …⑤

a =BC= $x+u+v+y$ より，$u+v=a-x-y$ …⑥

⑤，⑥を連立させて，$u=s-c-y$，$v=s-b-x$ …⑦

これらに②，①を代入すると，$u=(s-c)\left(1-\dfrac{r_2 s}{S}\right)$，$v=(s-b)\left(1-\dfrac{r_1 s}{S}\right)$ …⑦'

$\triangle O_1ID \backsim \triangle DJO_2$ より，$\dfrac{u}{r_1}=\dfrac{r_2}{v}$ $\therefore uv=r_1r_2$

これに⑦'を代入すると，$(s-c)\left(1-\dfrac{r_2 s}{S}\right)\cdot(s-b)\left(1-\dfrac{r_1 s}{S}\right)=r_1r_2$

$(s-c)(s-b)=\dfrac{S^2}{s(s-a)}$ であるから，$\dfrac{S^2}{s(s-a)}\left\{1-\dfrac{s(r_1+r_2)}{S}+\dfrac{s^2r_1r_2}{S^2}\right\}=r_1r_2$

分母を払って展開すると，$S^2-s(r_1+r_2)S+s^2r_1r_2=s(s-a)r_1r_2$

$S=rs$ であるから，第1項を $S^2=rsS$ に書き換えると，$rsS-s(r_1+r_2)S+asr_1r_2=0$

両辺を s で割り，S について解くと，$S=\dfrac{ar_1r_2}{r_1+r_2-r}$ ■

(2) c =AB= $q+v+p+x=q+(s-b-x)+p+x$ (∵⑦) $=p+q+s-b$

$\therefore p+q=b+c-s=s-a$ …⑧

$\triangle O_3GM \backsim \triangle O_2GL$ より，$\dfrac{r_3}{p}=\dfrac{r_2}{u}$

$\therefore p=\dfrac{r_3}{r_2}u=\dfrac{r_3}{r_2}\left\{s-c-\dfrac{r_2}{r}(s-c)\right\}$ (∵⑦) $=\dfrac{r_3(s-c)}{r_2}-\dfrac{r_3(s-c)}{r}$

$\triangle AO_3M \backsim \triangle AO_1K$ より，$\dfrac{r_3}{q}=\dfrac{r_1}{s-a+v}$

$\therefore q=\dfrac{r_3}{r_1}(s-a+v)=\dfrac{r_3}{r_1}\left\{s-a+s-b-\dfrac{r_1}{r}(s-b)\right\}$ (∵⑦) $=\dfrac{r_3}{r_1}\left\{c-\dfrac{r_1}{r}(s-b)\right\}$

$=\dfrac{cr_3}{r_1}-\dfrac{r_3(s-b)}{r}$

これらを⑧に代入すると，$\dfrac{r_3(s-c)}{r_2}-\dfrac{r_3(s-c)}{r}+\dfrac{cr_3}{r_1}-\dfrac{r_3(s-b)}{r}=s-a$

両辺を r_3 で割ると，$\dfrac{s-c}{r_2}-\dfrac{s-c}{r}+\dfrac{c}{r_1}-\dfrac{s-b}{r}=\dfrac{s-a}{r_3}$ $\dfrac{c}{r_1}+\dfrac{s-c}{r_2}-\dfrac{a}{r}=\dfrac{s-a}{r_3}$

移項すると，$\dfrac{a}{r}+\dfrac{s-a}{r_3}=\dfrac{c}{r_1}+\dfrac{s-c}{r_2}$ …⑨ ■

r_3 と r_4 を入れ換えると，b と c，r_1 と r_2 が入れ換わるから，$\dfrac{a}{r}+\dfrac{s-a}{r_4}=\dfrac{b}{r_2}+\dfrac{s-b}{r_1}$ …⑩ ■

(3) AD= $(s-a)+u+v=s-a+(s-c-y)+(s-b-x)$ (∵⑦) $=s-x-y$

これに，①，②を代入すると，

AD= $s-\dfrac{r_1}{r}(s-b)-\dfrac{r_2}{r}(s-c)=\dfrac{br_1}{r}+\dfrac{cr_2}{r}-\dfrac{s(r_1+r_2-r)}{r}=\dfrac{br_1+cr_2}{r}-\dfrac{S(r_1+r_2-r)}{r^2}$

(1)より，$S(r_1+r_2-r)=ar_1r_2$ であるから，

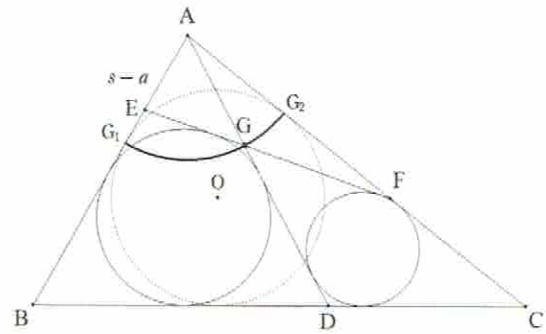
$$\mathrm{AD}=\frac{br_1+cr_2}{r}-\frac{ar_1r_2}{r^2}=b\cdot\frac{r_1}{r}+c\cdot\frac{r_2}{r}-a\cdot\frac{r_1}{r}\cdot\frac{r_2}{r}\quad■$$

(4) 前の図で，

AG＝AM＋MK＝$q+p=p+q=s-a$ （∵⑧）

よって，AG＝ $s-a$ より定数となる。

A は定点であるから，G は，A を中心，半径 $s-a$ の円周上にある。なお，$s-a$ という長さは，△ABC の内接円と AB，AC との接点をそれぞれ G_1，G_2 とすると，$AG_1=AG_2=s-a$ であるから，求める軌跡は，



A を中心，半径 $AG_1=s-a$ の円の劣弧 G_1G_2 となる。（ただし，点 G_1，G_2 を除く） 答

補足

[1] $\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}=\dfrac{1}{r_3}-\dfrac{1}{r_4}$ （∵⑨－⑩より，得られる。）

別解 △ABCを△ABD（右図）と△ADCに分けて考える。△ABD 内の円 O_1，O_3 について，A から EG（EF）に下した垂線の足を H_3 とし，$AH_3=h$ とおく。他は，図のように記号を付ける。

$\triangle I_3O_3J_3 \backsim \triangle I_3AH_3 \backsim \triangle I_1O_1J_1 \backsim \triangle I_1AH_3$ であるから，

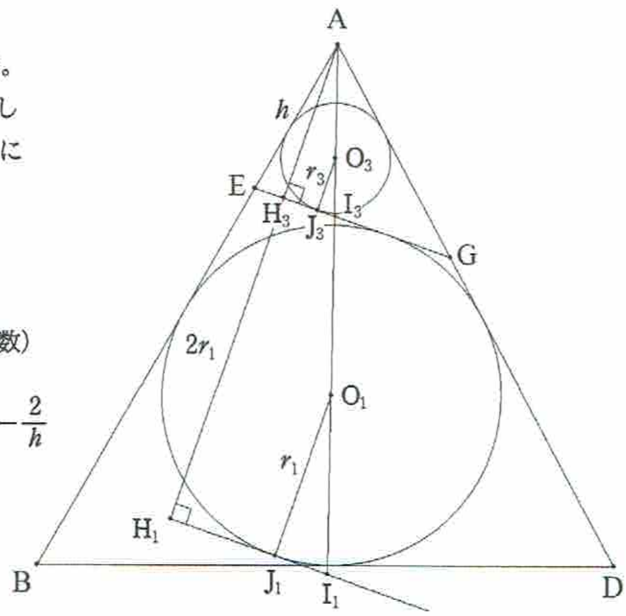
$r_3:h=r_1:(h+2r_1)$ $\quad r_3(h+r_1)=hr_1$

両辺を hr_1r_3 で割り，移項すると，$\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_3}=-\dfrac{2}{h}$ （定数）

同様に，△ADC 内の円 O_2，O_4 についても，$\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_4}=-\dfrac{2}{h}$

よって，$\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_4}$

移項すると，$\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}=\dfrac{1}{r_3}-\dfrac{1}{r_4}$ が示される。■



[2] 三角形の高さを h とすると，$\left(1-\dfrac{2r_1}{h}\right)\left(1-\dfrac{2r_2}{h}\right)=1-\dfrac{2r}{h}$ （∵(1)から得られる。）

[3] (3)で，$r_1=r_2$ のとき，AD＝$\sqrt{s(s-a)}$ となる。

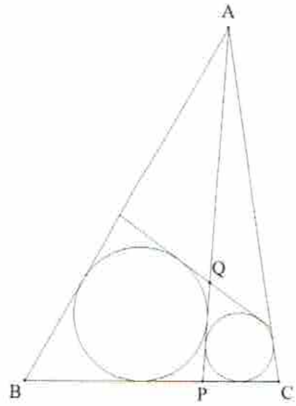
[4] ∠A＝90°，$r_1=r_2$ のとき，$r_1=\dfrac{bc}{a+b+c+\sqrt{2bc}}$ となる。 （2021/7/3　ジョーカー）

追加問題(4)について，解答者からの質問
「AG=(一定)という結果は興味深いです．点Gには，なにか特別な名称がついているのでしょうか？」について

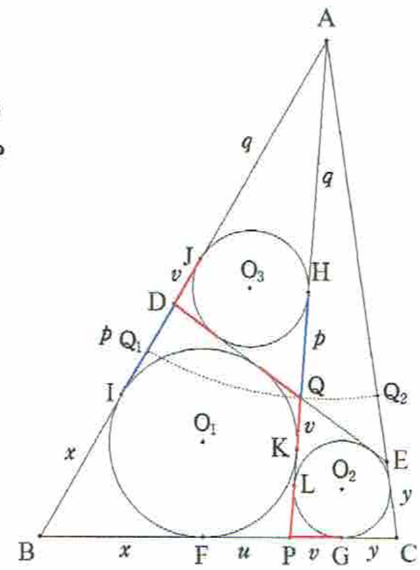
HP管理者から上記の質問がメールで寄せられました。（2021/8/12）
私自身知らなかったので幾何学に造詣の深い横田弥五郎 様（ペンネーム）に次の問題を送って質問しました。

問題

△ABCのBC上に点Pをとり，△ABP，△APCの内接円の共通外接線（BCでない方）と，APとの交点をQとする。
PがBからCまで動くとき（P≒B，P≒C），点Qの軌跡を求めよ。



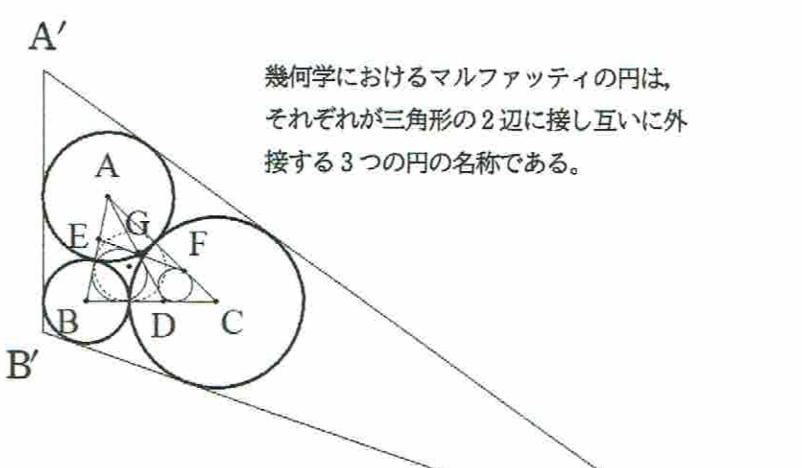
【メールでの回答をご紹介します。】



1　右図で，円弧Q_1Q_2はAを中心とするマルファッティ円の一部です（マルファッティ円，ウィキペディアを参照）。
円の一部なのが残念で少し考えました。Qは円O_1とO_2の外接線と内接線の交点ですので，PがBCの延長線右側にあるとき，△ABPの内接円と△ACPの傍接円の内外接線の交点Qはやはりこの円上にあると思います。

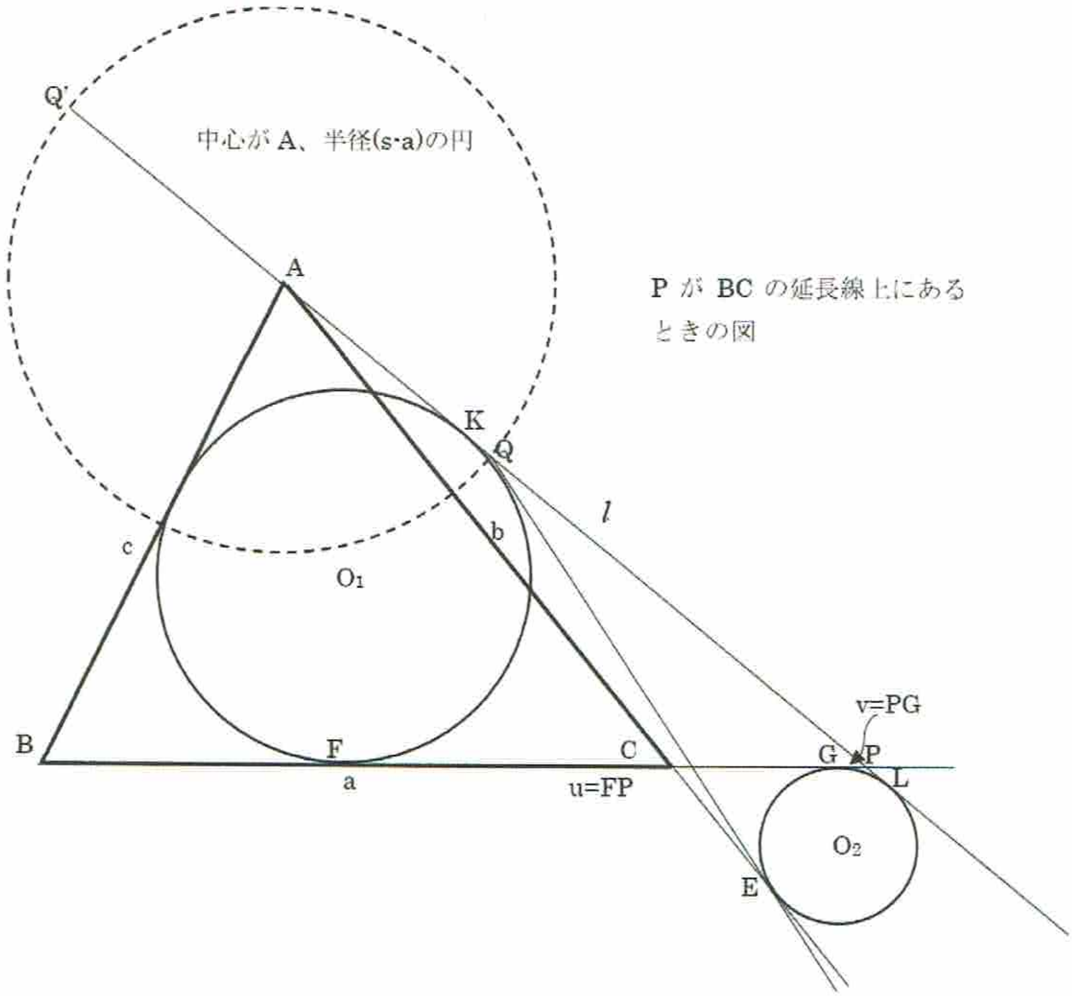
2　簡潔な証明

AP$=l$とする。$u=(\mathrm{BP}+l-c)/2$，$v=(l+\mathrm{PC}-b)/2$だから
FG$=u+v=l+(a-b-c)/2=l-(s-a)$
補題により，FG=QPだから，AQ$=l-\{l-(s-a)\}=s-a$　■



幾何学におけるマルファッティの円は，それぞれが三角形の2辺に接し互いに外接する3つの円の名称である。

3 Pが BCの延長線右側にあるとき



（説明）Pが BCの延長線上にあるとき円 O_2 は△APCの∠A 内の傍接円になる。Pが BC上にあるときと逆に，BC は両円の共通内接線，APは共通外接線になる。

共通内接線 FG(＝FP－PG)の長さは，次の通り「$l-(s-a)$」である。

FP=$(l+\mathrm{BP}-c)/2$，PG=$(b+\mathrm{CP}-l)/2$，

よって，FG=$(2l+\mathrm{BP}-\mathrm{CP}-b-c)/2=l+(a-b-c)/2=l-(s-a)$)

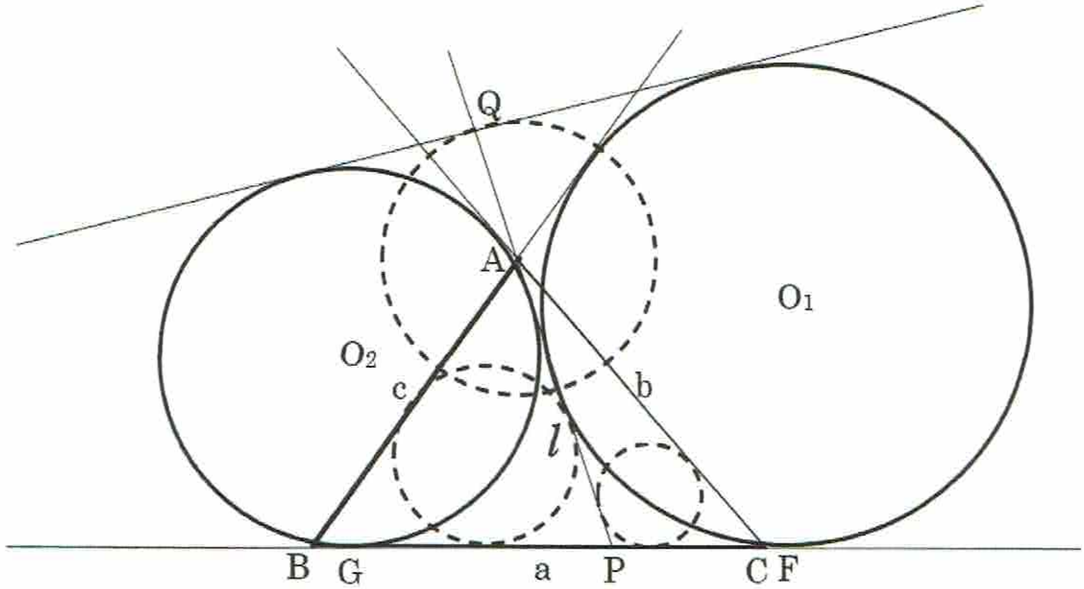
もう一本の共通内接線を引き APとの交点を Qとすると，PQの長さは（補題に見た通り）共通内接線の長さに等しいので，AQ= $l-\{l-(s-a)\}=(s-a)$ であることが分かる。

以上から，半径 $(s-a)$ の円 A と APの交点を Q とすると，PQの長さは円 O_1，O_2 の共通外接線または共通内接線の長さに等しいことが導かれた。

4 私はPが BCにあるとき AQ= $s-a$ と直観し，Pが延長線上のときの半円までは予想しましたが，円にするにはとってつけのQ'（つまり $\{l-(s-a)\}$ ）が必要なため，不完全です。

(2021.08.16 横田)

$\boxed{5}$ Q の軌跡である円の上半分を求める。



図において円 O_1 は△ABP の傍接円，円 O_2 は△ACP の傍接円である。
両円の共通外接線 GF の長さは

$GP = l-(l+b-PC)/2$，$PF = l-(l+c-BP)/2$ なので，$GF = 2l-l+(b+c-a)/2 = l+(s-a)$

PA ともう 1 本の共通外接線の交点を Q とすると，$PQ = GF$ だから，$AQ = GF-l = s-a$

(2021.08.18 横田)

$\boxed{6}$ P が BC の延長線上にあるときの Q′

O_1，O_2 は△ABP 及び△ACP の傍接円

$GF = GC+CP+PF$,

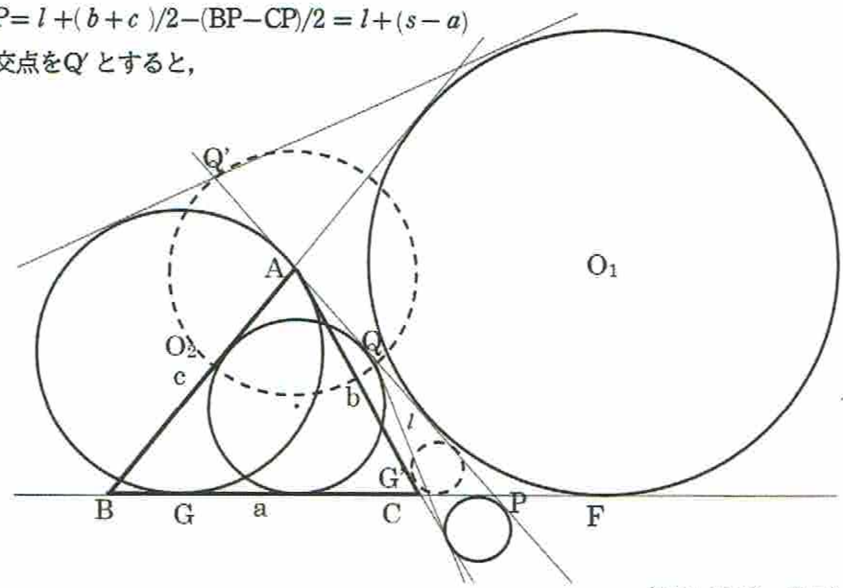
$GC = AG' = (b+l-CP)/2$，$PF = AQ = (c+l-BP)/2$ なので

$GF = l+(b+c)/2-(CP+BP)/2+CP = l+(b+c)/2-(BP-CP)/2 = l+(s-a)$

PA と O_1，O_2 のもう一本の外接線の交点を Q′ とすると，

$PQ' = GF = l+(s-a)$，

よって $AQ' = s-a$



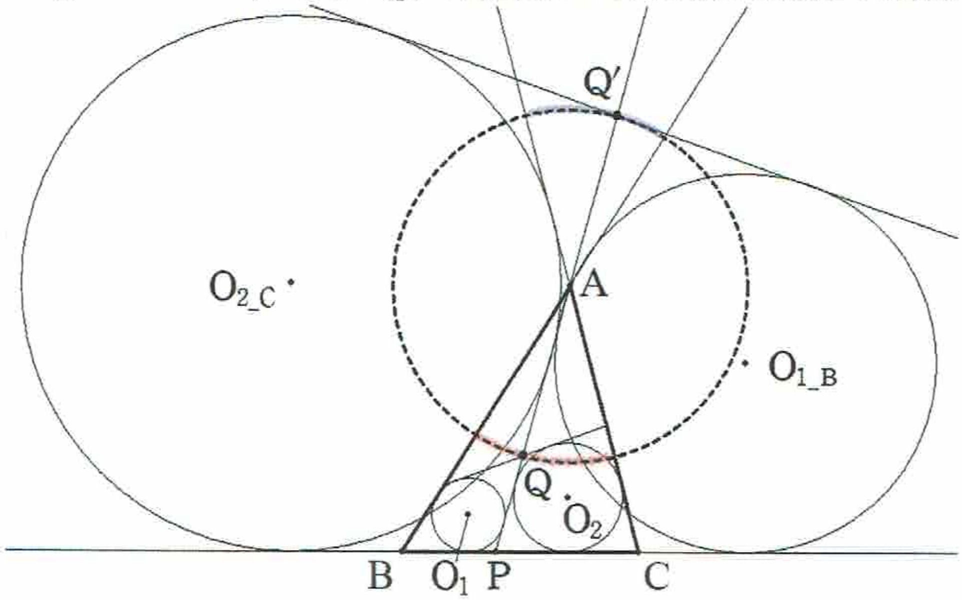
(2021.08.19 横田)

軌跡がマルファッティ円の一部になる例（まとめ）

[1]　P が BC 上にあるとき

(1)　△ABP の内接円 O_1 と△APC の内接円 O_2 の共通内接線 AP と共通外接線の交点 Q の軌跡は，図の赤円弧。

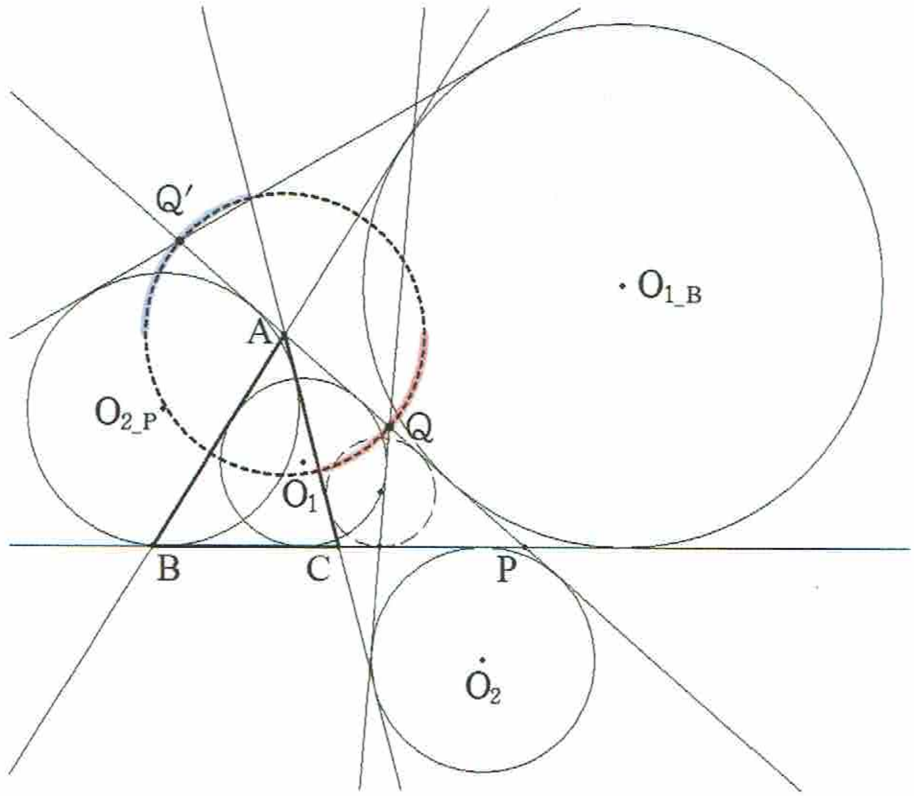
(2)　△ABP の∠B 内の傍接円 O_{1_B} と△APC の∠C 内の傍接円 O_{2_C} の共通内接線 AP と共通外接線の交点 Q′ の軌跡は，図の青円弧。



[2]　P が BC の延長上にあるとき

(1)　△ABP の内接円 O_1 と△APC の∠A 内の傍接円 O_2 の共通外接線 AP と共通内接線の交点 Q の軌跡は赤円弧。

(2)　△ABP の∠B 内の傍接円 O_{1_B} と△ACP の∠P 内の傍接円 O_{2_P} の共通内接線 AP と共通外接線の交点 Q′ の軌跡は，図の青円弧。



[3]　P が CB の延長上にあるとき　[2] と同様なので，省略

（2021/8/19　ジョーカー）