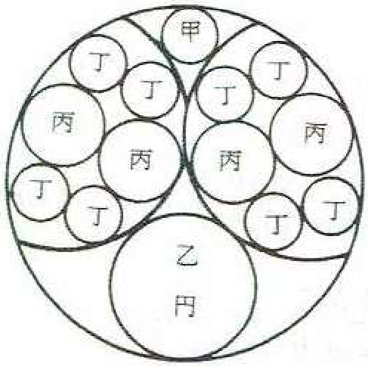
第 406 回

田代神社の算額（関流和算家谷幽斎先生遺弟・土屋武三郎信義奉納），弘化 2 年（1845）

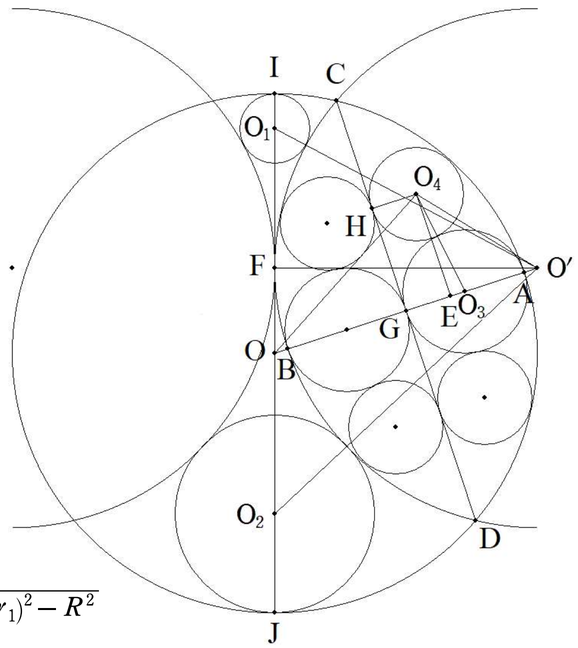
第 4 問題

円内にこの円と同じ半径をもつ 2 個の円弧を書きその中へ
14 個の円を書く。
丁円の直径の 48 倍を甲円の直径の 65 倍に等しくするとき，
乙円の直径を知って甲円の直径を求めよ。



術文（答）

甲円の直径$=\dfrac{7}{20}$(乙円の直径)



解答　与えられた図形は，甲乙円の中心を通る直線に関して対称であるから，右側について図のように記号を付けて考える。14 個の円を含む円，右側の円弧，甲乙丙丁円をそれぞれ $O(R)$，$O'(R)$，$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$，$O_4(r_4)$ とおく。

R，r_2，r_3，r_4 を r_1 を用いて表すためには同値でない 4 つの方程式が必要である。

仮定により，$r_4=\dfrac{65}{48}r_1$　…①

まず,

$O_1O_2=2R-r_1-r_2$，$O_2O'=R+r_2$，$O'O_1=R+r_1$，

$FO'=R$，三平方の定理により，$O_1F=\sqrt{(R+r_1)^2-R^2}$

であるから，$\triangle O_1O_2O'$，$\triangle O_1FO'$ について，

$O'O_1{}^2+O_1O_2{}^2-O_2O'^2=2\,O_1O_2\cdot O_1F$ より，(*)

$(R+r_1)^2+(2R-r_1-r_2)^2-(R+r_2)^2=2(2R-r_1-r_2)\sqrt{(R+r_1)^2-R^2}$

両辺を 2 乗し，左辺に移項し，r_2 について整理すると,

$4R\{R(2R-3r_1)^2-2(6R^2-9Rr_1+4r_1{}^2)r_2+(9R-8r_1)r_2{}^2\}=0$

$R\fallingdotseq 0$ より，$\therefore R(2R-3r_1)^2-2(6R^2-9Rr_1+4r_1{}^2)r_2+(9R-8r_1)r_2{}^2=0$　…②

次に,

$OB=AO'=x$ とおくと，$OO'=R+x=4r_3+2x$ より，$x=R-4r_3$　$\therefore OO'=2R-4r_3$

$\triangle OO'O_1$，$\triangle OO'F$ について，$O_1O'^2+OO'^2-O'O_1{}^2=2\,OO'\cdot OF$ より,

$(R-r_1)^2+(2R-4r_3)^2-(R+r_1)^2=2(R-r_1)\sqrt{(2R-4r_3)^2-R^2}$

両辺を 2 乗し，左辺に移項し，r_1 について整理すると,

$(R^2-8Rr_3+8r_3{}^2)^2-2R^3r_1+(R^2+16Rr_3-16r_3{}^2)r_1{}^2=0$　…③

最後に,

$OO_3=R-r_3$，$O_3O_4=r_3+r_4$，$O_4O=R-r_4$，$O_3E=r_3-r_4$ であるから，$\triangle O_3O_4O$，$\triangle O_3O_4E$ について,

$OO_3{}^2+O_3O_4{}^2-O_4O^2=2\,OO_3\cdot O_3E$ より，$(R-r_3)^2+(r_3+r_4)^2-(R-r_4)^2=2(R-r_3)(r_3-r_4)$

展開し，左辺に移項すると，$-4(Rr_3-{r_3}^2-Rr_4)=0 \quad \therefore R=\dfrac{{r_3}^2}{r_3-r_4}$ …④

①を④に代入すると，$R=\dfrac{{r_3}^2}{r_3-\dfrac{65}{48}r_1}=\dfrac{48{r_3}^2}{48r_3-65r_1}$ …④′

④′を③に代入すると，

$$\left(\left(\frac{48{r_3}^2}{48r_3-65r_1}\right)^2-8\frac{48{r_3}^2}{48r_3-65r_1}\cdot r_3+8{r_3}^2\right)^2-2\left(\frac{48{r_3}^2}{48r_3-65r_1}\right)^3r_1+\left(\left(\frac{48{r_3}^2}{48r_3-65r_1}\right)^2+16\cdot\frac{48{r_3}^2}{48r_3-65r_1}\cdot r_3-16{r_3}^2\right){r_1}^2=0$$

両辺に $(48r_3-65r_1)^4$ を掛けて整理すると，

$16{r_3}^2(325{r_1}^2-240r_1r_3+32{r_3}^2)(-54925{r_1}^4+81120{r_1}^3r_3+197028{r_1}^2{r_3}^2-167616r_1{r_3}^3+10368{r_3}^4)=0$

$r_3>0$ より，$325{r_1}^2-240r_1r_3+32{r_3}^2=0$ …⑤,

$-54925{r_1}^4+81120{r_1}^3r_3+197028{r_1}^2{r_3}^2-167616r_1{r_3}^3+10368{r_3}^4=0$ …⑤′

⑤より，$r_3=\dfrac{5(6\pm\sqrt{10})}{8}r_1$　近似値は小さい方から，$r_3 \fallingdotseq 1.77r_1$，$5.73r_1$

⑤′より，近似値は小さい方から，$r_3 \fallingdotseq -0.59r_1$，$0.41r_1$，$1.49r_1$，$14.8r_1$（Mathematica で計算）

題意に適するのは，図より，$r_3 \fallingdotseq 1.49r_1$ でなく，$r_3 \fallingdotseq 1.77r_1$ の方であるから，$r_3=\dfrac{5(6-\sqrt{10})}{8}r_1$

これを④′に代入すると，$R=\dfrac{48\left\{\dfrac{5(6-\sqrt{10})}{8}r_1\right\}^2}{48\cdot\dfrac{5(6-\sqrt{10})}{8}r_1-65r_1}=\dfrac{15}{2}r_1$

これを②に代入すると，$\dfrac{15r_1}{2}\cdot\left(2\cdot\dfrac{15r_1}{2}-3r_1\right)^2-2\left(6\left(\dfrac{15r_1}{2}\right)^2-9\cdot\dfrac{15r_1}{2}\cdot r_1+4{r_1}^2\right)r_2+\left(9\cdot\dfrac{15r_1}{2}-8r_1\right){r_2}^2=0$

展開して整理すると，$r_1(108r_1-17r_2)(20r_1-7r_2)=0$

$r_1>0$ より，$\therefore r_2=\dfrac{20}{7}r_1$，$\dfrac{108}{17}r_1$

近似値は，順に $2.86r_1$，$6.35r_1$ であるから，題意に適するのは図より，$r_2=\dfrac{20}{7}r_1$

よって，甲円径$=\dfrac{7}{20}$(乙円径)　答

(*)

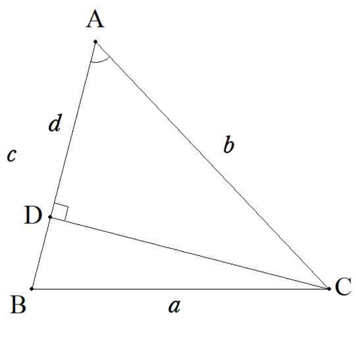
△ABCについて，

CからABに下した垂線の足をD,

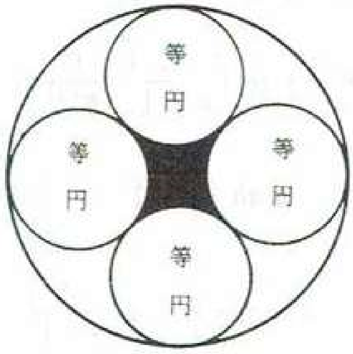
AD$=d$ とすると，

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{d}{b}$ より，

$b^2+c^2-a^2=2cd$　■



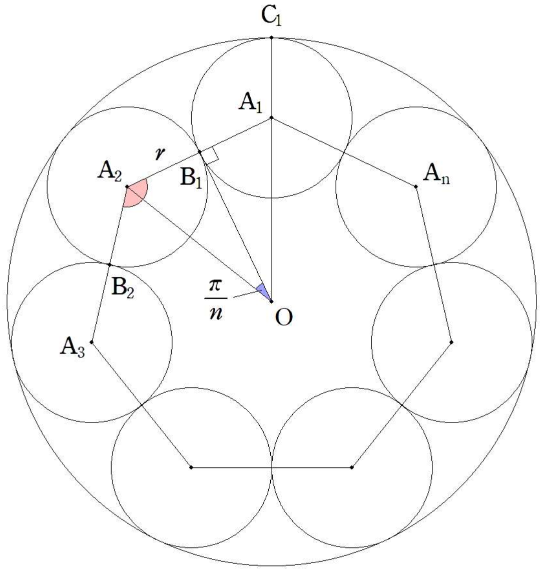
第５問題
円内に等円数個を入れる（仮に４個）。
黒い部分の面積と等円の直径を知って，
等円の個数を求めよ。



術文（答）

$$\text{等円個数}=\left[\frac{2\sqrt{\pi(\text{円径})}}{(\text{等円径})}\right]+2$$

解答　円をO(R)，n 個の等円を$\mathrm{A_i}(r)$（i＝1，2，…，n ）とおき，図のように記号を付ける。小円径 $d=2r$



$\angle \mathrm{A_2OB_1}=\dfrac{\pi}{n}$ であるから，扇形 $\mathrm{A_2B_2B_1}$ の中心角は，

$$2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)=\pi-\frac{2\pi}{n}$$

黒い部分の面積（中央の n 個の扇形で囲まれる部分の面積）を S とおくと，

$$S=(\text{正}\,n\,\text{角形}\ \mathrm{A_1A_2\cdots A_n})-(\,n\,\text{個の扇形}\ \mathrm{A_2B_2B_1})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot\frac{r}{\tan\frac{\pi}{n}}\times n-\frac{1}{2}r^2\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)\times n$$

$$=r^2\left(\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}-\frac{n-2}{2}\pi\right)$$

$$=\left(\frac{d}{2}\right)^2\left(\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}-\frac{n-2}{2}\pi\right)$$

$$\therefore\ \frac{S}{d^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}-\frac{n-2}{2}\pi\right)$$

$\dfrac{S}{d^2}$ は定数であるから，$\dfrac{S}{d^2}=k$とおく。

次に，$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}-\dfrac{n-2}{2}\pi\right)=k$ から n を与える公式を考える。

$\dfrac{1}{\tan x}=cot x=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^3}{45}-\dfrac{2x^5}{945}-\dfrac{x^7}{4725}-\cdots-\dfrac{B_{2n-1}(2x)^{2n}}{x(2n)!}-\cdots$　（$|x|<\pi$ ）であることを利用する。（*）

$x=\dfrac{\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{3}\fallingdotseq 1.05$ であるから，第３項は，$-\dfrac{x^3}{45}\fallingdotseq 0.026$ となり，ガウス記号をとるとき第３項以降は無視しても差し支えない。

以下ガウス記号をとる前提で，$\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{3}$ とおくと，$\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{n}}=\dfrac{n}{\pi}-\dfrac{\pi}{3n}$ より，

$$k=\frac{1}{4}\left\{n\left(\frac{n}{\pi}-\frac{\pi}{3n}\right)-\frac{n-2}{2}\pi\right\}=\frac{1}{4}\left(\frac{n^2}{\pi}-\frac{\pi}{3}-\frac{n-2}{2}\pi\right)$$ …①とおいてみる。

①の両辺に 24π を掛けて整理すると，$6n^2-3\pi^2n+4\pi^2-24\pi k=0$

$$n=\frac{3\pi^2\pm\sqrt{(-3\pi^2)^2-4\cdot6(4\pi^2-24\pi k)}}{12}$$

$n\geqq3$ であるから，

$$n=\frac{3\pi^2+\sqrt{(-3\pi^2)^2-4\cdot6(4\pi^2-24\pi k)}}{12}=\frac{\pi^2}{4}+\sqrt{\frac{\pi^4}{16}-\frac{2\pi^2}{3}+4\pi k}$$

さて，この左辺が実際にガウス記号をとったとき，n の値を返すか確かめてみる。

$$k=\frac{1}{4}\left(\frac{n}{\tan\dfrac{\pi}{n}}-\frac{n-2}{2}\pi\right)$$ として，

$n=3,\ 4,\ \cdots,\ 50$ まで $\dfrac{\pi^2}{4}+\sqrt{\dfrac{\pi^4}{16}-\dfrac{2\pi^2}{3}+4\pi k}$ の値を計算してみる（小数第10位まで）。

In[1]:= $$\mathbf{k}=\frac{1}{4}\left(\frac{n}{\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi}{n}\right]}-\frac{n-2}{2}\pi\right);$$

$$\mathrm{Table}\left[\mathrm{N}\left[\frac{\pi^2}{4}+\sqrt{\frac{\pi^4}{16}-\frac{2\,\pi^2}{3}+4\,\pi\,k}\ ,\ 10\right],\ \{n,\ 3,\ 50\}\right]$$

```
Out[1]= {2.589580535, 3.952358384, 4.982173847, 5.991250086,
  6.995028677, 7.996896869, 8.997930207, 9.998549367,
  10.99894341, 11.99920632, 12.99938854, 13.99951886, 14.99961456,
  15.99968643, 16.99974146, 17.99978431, 18.99981818, 19.99984531,
  20.99986729, 21.99988529, 22.99990018, 23.99991259, 24.99992303,
  25.99993187, 26.99993940, 27.99994587, 28.99995144, 29.99995628,
  30.99996049, 31.99996418, 32.99996742, 33.99997028, 34.99997282,
  35.99997508, 36.99997709, 37.99997889, 38.99998051, 39.99998197,
  40.99998328, 41.99998447, 42.99998555, 43.99998653, 44.99998743,
  45.99998825, 46.99998899, 47.99998968, 48.99999031, 49.99999089}
```

この結果から，切り上げると n の値に一致することがわかるから，$n=\left[\dfrac{\pi^2}{4}+\sqrt{\dfrac{\pi^4}{16}-\dfrac{2\pi^2}{3}+4\pi k}\right]+1$

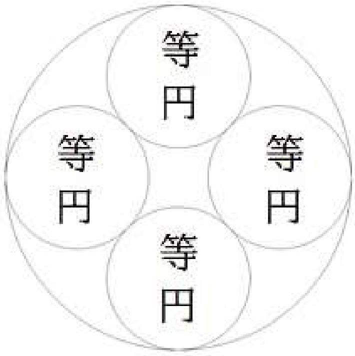
よって，$k=\dfrac{S}{d^2}=\dfrac{(\text{黒い部分の面積})}{(\text{等円径})^2}=\text{極}$ とおくと，

$$\text{等円個数}=\left[\frac{\pi^2}{4}+\sqrt{\frac{\pi^4}{16}-\frac{2\pi^2}{3}+4\pi(\text{極})}\right]+1$$ 答

【参考文献】

(*) パース・フォスター簡約積分表（ブレイン図書出版株式会社　1972年）p.101

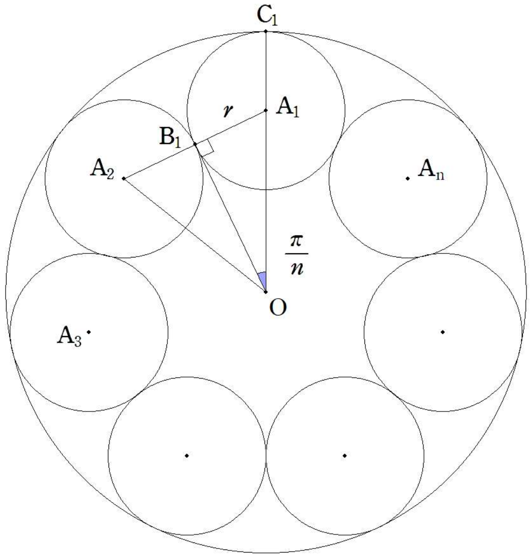
第５問題（改題）
円内に等円数個を入れる（仮に４個）。
円径と等円の直径を知って，
等円の個数を求めよ。



術文（答）

$$等円個数=\left[\frac{2\sqrt{\pi(円径)}}{(等円径)}\right]+2$$

解答　円を$O(R)$，n 個の等円を$A_i(r)$（i＝1，2，…，n）とおき，
図のように記号を付ける。



$\angle A_1OB_1=\dfrac{\pi}{n}$ であるから，$A_1O=\dfrac{r}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$

$$R=C_1A_1+A_1O=r+\frac{r}{\sin\dfrac{\pi}{n}}=r\left(1+\frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\right)$$

移項して両辺に π を掛けると，$\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n}}=\pi\left(\dfrac{R}{r}-1\right)$

ガウス記号をとると，$\left[\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\right]=n$ （定理）であるから，

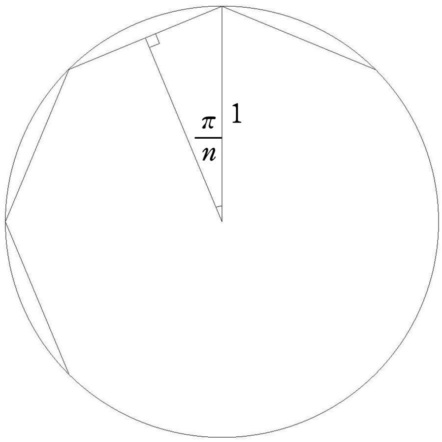
$$n=\left[\pi\left(\frac{R}{r}-1\right)\right]=\left[\pi\left(\frac{(円径)}{(等円径)}-1\right)\right]$$　答

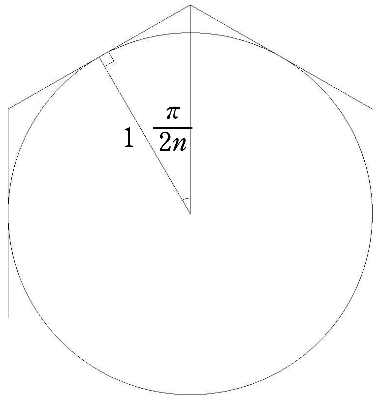
注意　術文（答）について
円径と等円径は分母分子，同じ次数になるはずです。
図形を相似拡大すると，$\dfrac{(円径)}{(等円径)}$ は一定ですが，術文（答）の $\dfrac{\sqrt{(円径)}}{(等円径)}$ の部分は一定になりません。
ですから術文（答）は，元の問題でも改題後でもどちらも不合理です。印刷ミスと思われます。

定理　自然数 $n \geqq 3$ について次式が成立する。

$$\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]=n \quad (n \geqq 3) \qquad [\ \ ]\text{はガウス記号}$$

証明　$n \leqq \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} < n+1$ を示す。





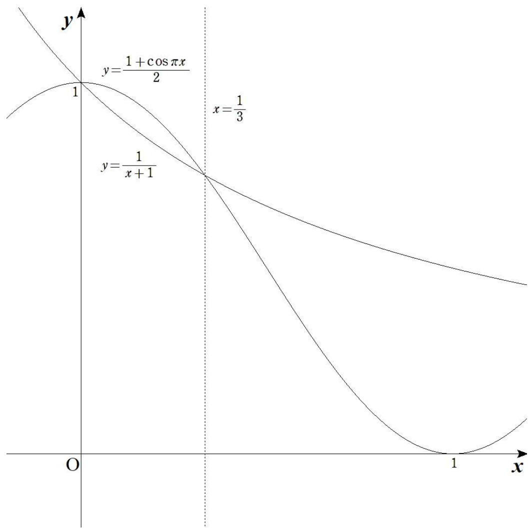
半径 1 の円に正 n 角形を内接させると，$2\pi > n \cdot 2\sin\dfrac{\pi}{n}$　$\therefore\ n < \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$　…①

半径 1 の円に正 $2n$ 角形を外接させると，$2\pi < 2n \cdot 2\tan\dfrac{\pi}{2n}$

故に，$2n \cdot 2\tan\dfrac{\pi}{2n} \leqq 2(n+1)\sin\dfrac{\pi}{n}$ を示せば十分である。

$\dfrac{1}{n}=x$ とおけば，$x \leqq \dfrac{1}{3}$ で $\dfrac{1}{1+x} \leqq \cos^2\dfrac{\pi}{2}x = \dfrac{1+\cos\pi x}{2}$ を示せばよい。$\left(0 < x \leqq \dfrac{1}{3}\right)$

両辺のグラフはよく知られている。



右図より．$0 < x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{1}{x+1} \leqq \dfrac{1+\cos\pi x}{2}$

よって，$\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} < n+1$　…②

①，②より，$n \leqq \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} < n+1$

よって，$\left[\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]=n \quad (n \geqq 3)$　終

参考 $\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$ の近似値（$n=3,\ 4,\ \cdots,\ 100$）

```
In[1]:= Table[N[π/Sin[π/n]], {n, 3, 100}]
```

```
Out[1]= {3.6276, 4.44288, 5.3448, 6.28319, 7.24063, 8.20938, 9.1854, 10.1664,
 11.151, 12.1382, 13.1274, 14.1182, 15.1102, 16.1033, 17.0971,
 18.0917, 19.0869, 20.0825, 21.0785, 22.0749, 23.0717, 24.0687,
 25.0659, 26.0634, 27.061, 28.0588, 29.0568, 30.0549, 31.0531, 32.0515,
 33.0499, 34.0484, 35.047, 36.0457, 37.0445, 38.0433, 39.0422, 40.0412,
 41.0401, 42.0392, 43.0383, 44.0374, 45.0366, 46.0358, 47.035, 48.0343,
 49.0336, 50.0329, 51.0323, 52.0316, 53.031, 54.0305, 55.0299, 56.0294,
 57.0289, 58.0284, 59.0279, 60.0274, 61.027, 62.0265, 63.0261, 64.0257,
 65.0253, 66.0249, 67.0246, 68.0242, 69.0238, 70.0235, 71.0232,
 72.0229, 73.0225, 74.0222, 75.0219, 76.0216, 77.0214, 78.0211,
 79.0208, 80.0206, 81.0203, 82.0201, 83.0198, 84.0196, 85.0194,
 86.0191, 87.0189, 88.0187, 89.0185, 90.0183, 91.0181, 92.0179,
 93.0177, 94.0175, 95.0173, 96.0171, 97.017, 98.0168, 99.0166, 100.016}
```

（2021/10/18　ジョーカー）