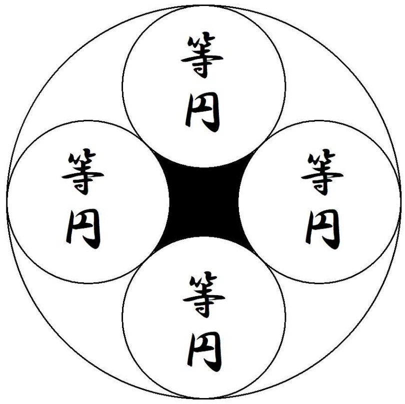
第406回

田代神社の算額（関流和算家谷幽斎先生遺弟・土屋武三郎信義奉納），弘化2年（1845）

第5問題

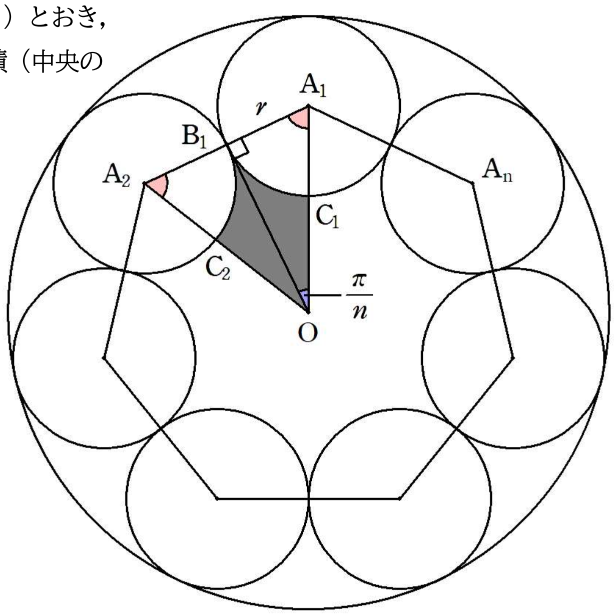
円内に等円数個を入れる（仮に4個）。
黒い部分の面積と等円の直径を知って，
等円の個数を求めよ。



術文（答）

$$等円個数=\left[\frac{2\sqrt{\pi(黒い部分の面積)}}{(等円径)}\right]+2$$

解答　円の中心をO，n 個の等円を$A_i(r)$（i=1, 2, …, n）とおき，図のように記号を付ける。小円径を $d=2r$，黒い部分の面積（中央の n 個の扇形で囲まれる部分の面積）を S とおく。



正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n=\triangle OA_1A_2\times n$

また，$\angle A_1OB_1=\frac{\pi}{n}$ より，扇形 $A_1B_1C_1$ の中心角は，

$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$ であるから，扇形 $A_1B_1C_1=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)$

右図の網掛け部分$=\triangle OA_1A_2-$扇形 $A_1B_1C_1\times 2$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot\frac{r}{\tan\frac{\pi}{n}}-\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\times 2$$

$$=r^2\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{n}}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)$$

従って，$S=r^2\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{n}}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)\times n=\left(\frac{d}{2}\right)^2\left(\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}-\frac{\pi}{2}n+\pi\right)$

$$\therefore\frac{4S}{d^2}=\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}-\frac{\pi}{2}n+\pi\quad\cdots①$$

$\frac{1}{\tan x}=cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\frac{x^7}{4725}-\cdots-\frac{B_{2n-1}(2x)^{2n}}{x(2n)!}-\cdots$ （$|x|<\pi$）（*）を利用する。

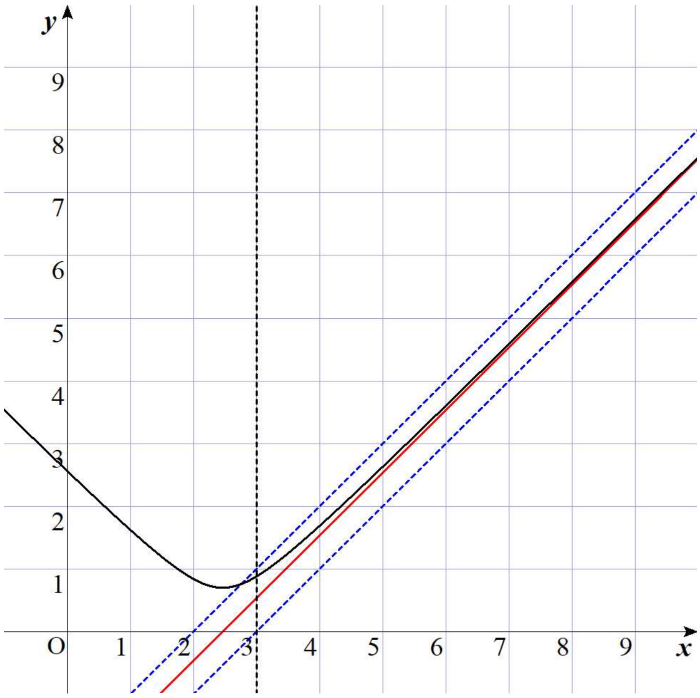
$x=\frac{\pi}{n}\leqq\frac{\pi}{3}$ であるから，第3項は，$\left|-\frac{x^3}{45}\right|\leqq\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{45}=0.0255\cdots$ となり，ガウス記号をとるとき第3項以降は無視しても差し支えない。

以下ガウス記号をとる前提で，$\frac{1}{\tan x}\fallingdotseq\frac{1}{x}-\frac{x}{3}$ とおくと，$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{n}}\fallingdotseq\frac{n}{\pi}-\frac{\pi}{3n}$ より，①は，

$$\frac{4S}{d^2}\fallingdotseq n\left(\frac{n}{\pi}-\frac{\pi}{3n}\right)-\frac{\pi}{2}n+\pi=\frac{n^2}{\pi}-\frac{\pi}{2}n+\frac{2\pi}{3}\quad\cdots②$$

ここで，術文を文字式で表すと，$n=\left[\dfrac{2\sqrt{\pi S}}{d}\right]+2$ となるから，②より，$\dfrac{2\sqrt{\pi S}}{d} \fallingdotseq \sqrt{n^2-\dfrac{\pi^2}{2}n+\dfrac{2\pi^2}{3}}$ …②′

②′より，関数 $y=\sqrt{x^2-\dfrac{\pi^2}{2}x+\dfrac{2\pi^2}{3}}$ （$x\geqq 3$）のグラフを考える。（概形は右図）



漸近線を $y=ax+b$ とおくと，

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-\dfrac{\pi^2}{2}x+\dfrac{2\pi^2}{3}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{\pi^2}{2x}+\frac{2\pi^2}{3x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-\frac{\pi^2}{2}x+\frac{2\pi^2}{3}}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{\pi^2}{2}x+\dfrac{2\pi^2}{3}}{\sqrt{x^2-\dfrac{\pi^2}{2}x+\dfrac{2\pi^2}{3}}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{\pi^2}{2}+\dfrac{2\pi^2}{3x}}{\sqrt{1-\dfrac{\pi^2}{2x}+\dfrac{2\pi^2}{3x^2}}+1}=-\frac{\pi^2}{4}$$

従って漸近線は，$y=x-\dfrac{\pi^2}{4}$　$-3<-\dfrac{\pi^2}{4}<-2$ より，$x-3<y<x-2$

これと②′から，$n-3<\sqrt{n^2-\dfrac{\pi^2}{2}n+\dfrac{2\pi^2}{3}}<n-2$　…③となる。

（∵）

この③の不等式は，$n-3<\sqrt{n^2-\dfrac{\pi^2}{2}n+\dfrac{2\pi^2}{3}}$，$\sqrt{n^2-\dfrac{\pi^2}{2}n+\dfrac{2\pi^2}{3}}<n-2$ の連立である。

前者より，$n>\dfrac{9-\dfrac{2\pi^2}{3}}{6-\dfrac{\pi^2}{2}}=2.27\cdots$，後者より $n>\dfrac{\dfrac{2\pi^2}{3}-4}{\dfrac{\pi^2}{2}-4}=2.75\cdots$ となるから，$n\geqq 3$ で成り立つ。■

よって③より，$\sqrt{n^2-\dfrac{\pi^2}{2}n+\dfrac{2\pi^2}{3}}+2<n<\sqrt{n^2-\dfrac{\pi^2}{2}n+\dfrac{2\pi^2}{3}}+3$

$\therefore n=\left[\sqrt{n^2-\dfrac{\pi^2}{2}n+\dfrac{2\pi^2}{3}}\right]+3=\left[\dfrac{2\sqrt{\pi S}}{d}\right]+3$ となるから，等円個数$=\left[\dfrac{2\sqrt{\pi(\text{黒い部分の面積})}}{(\text{等円径})}\right]+3$ 答

【参考文献】

（*）パース・フォスター簡約積分表（ブレイン図書出版株式会社　1972年）p.101

注意　術文は，一部印刷ミスと思われる。

（2022/11/19　ジョーカー）