第 407 回追加問題

1．5数 a，b，c，d，e について，

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}+\dfrac{1}{e^2}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}=a+b+c+d+e=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=1$ のとき，

a，b，c，d，e の中に1があることを示せ。

証明　$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e-1)=0$ を示す。

左辺$=abcde-(abcd+abce+abde+acde+bcde)+(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde$
$+cde)-(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)+(a+b+c+d+e)-1$

$$=abcde\left\{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\right\}+\frac{1}{2}abcde\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}\right)\right\}+$$

$$\frac{1}{2}\{(a+b+c+d+e)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\}=0=\text{右辺}$$

よって，a，b，c，d，e のうちどれかは1である。 終

別解　$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)=x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t$ とおくと，解と係数の関係により，

$p=-(a+b+c+d+e)=-1$

$q=ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de=\dfrac{1}{2}\{(a+b+c+d+e)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}(1^2-1)=0$

$r=-(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+cde)$

$=-abcde\left\{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}\right)^2-\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}+\dfrac{1}{e^2}\right)\right\}=\dfrac{1}{2}(1^2-1)=0$

$s=abcd+abce+abde+acde+bcde=abcde\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}\right)=abcde=t$

よって，$f(x)=x^4-x^3-tx+t$ となり，$f(1)=0$ となるから，a，b，c，d，e のうちどれかは1である。 終

2．数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\varepsilon^n$ と表され，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=4$，$a_5=5$ のとき，a_6 の値を求めよ。

解答　$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)=x^5-px^4+qx^3-rx^2+sx-t$ とおくと，

$f'(x)=5x^4-4px^3+3qx^2-2rx+s$ であるから，$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\dfrac{5x^5-4px^4+3qx^3-2rx^2+sx}{x^5-px^4+qx^3-rx^2+sx-t}$

普通に割り算を実行すると，

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=5+\frac{p}{x}+\frac{p^2-2q}{x^2}+\frac{p^3-3pq+3r}{x^3}+\frac{p^4-4p^2q+2q^2+4pr-4s}{x^4}$$
$$+\frac{p^5-5p^3q+5pq^2+5p^2r-5qr-5ps+5t}{x^5}$$

（以下省略）

$$+\frac{p^6-6p^4q+9p^2q^2-2q^3+6p^3r-12pqr+3r^2-6p^2s+6qs+6pt}{x^6}+\cdots$$

$$=5+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\frac{a_4}{x^4}+\frac{a_5}{x^5}+\frac{a_6}{x^6}+\cdots$$

$=5+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}+\frac{5}{x^5}+\frac{a_6}{x^6}+\cdots$ であるから，係数を比較して，

$p=1$， $p^2-2q=2$， $p^3-3pq+3r=3$， $p^4-4p^2q+2q^2+4pr-4s=4$， $p^5-5p^3q+5pq^2+5p^2r-5qr-5ps+5t=5$ より， $p=1$， $q=-\frac{1}{2}$， $r=\frac{1}{6}$， $s=\frac{1}{24}$， $t=-\frac{19}{120}$

このとき， $a_6=p^6-6p^4q+9p^2q^2-2q^3+6p^3r-12pqr+3r^2-6p^2s+6qs+6pt=\frac{871}{120}$ 答