● 問題 411 〈追加問題〉 解答＜三角定規＞

(1) $x^3-3x+1=0$ …①

$x=r\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ …② と置き①に代入すると

$r^3\cos^3\theta-3r\cos\theta+1=0$ …③

3 倍角の公式より $\cos^3\theta=\dfrac{\cos3\theta+3\cos\theta}{4}$ であるから③に代入し

$$\frac{r^3}{4}\cos3\theta+3r\left(\frac{r^2}{4}-1\right)\cos\theta+1=0 \quad \cdots④$$

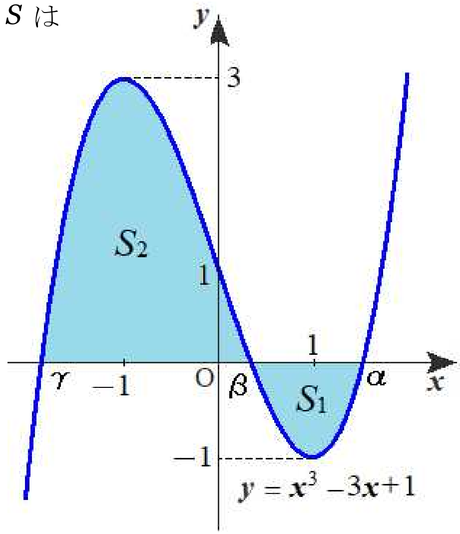
ここで $r=2$ とすると $2\cos3\theta+1=0$ $\therefore$ $\cos3\theta=-\dfrac{1}{2}$ …⑤

$0\leqq3\theta\leqq3\pi$ で⑤を解くと $3\theta=\dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{8\pi}{3}$ $\therefore$ $\theta=\dfrac{2\pi}{9},\ \dfrac{4\pi}{9},\ \dfrac{8\pi}{9}$

これらを②に戻して，求める①の解は $\boldsymbol{x=2\cos\dfrac{2\pi}{9},\ 2\cos\dfrac{4\pi}{9},\ 2\cos\dfrac{8\pi}{9}}$ …[答]

(2) $y=x^3-3x+1$ …⑥

$\alpha=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$, $\beta=2\cos\dfrac{4\pi}{9}$, $\gamma=2\cos\dfrac{8\pi}{9}$ と置くと，求める面積 S は



$$S=\int_\gamma^\beta ydx+\int_\beta^\alpha(-y)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+x\right]_\gamma^\beta-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+x\right]_\beta^\alpha$$

$f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3x^2}{2}+x$ と置くと，$S=2f(\beta)-f(\alpha)-f(\gamma)$ …⑦

ここで α,β,γ は①の解だから $\alpha^3-3\alpha+1=0$

$\therefore$ $\alpha^3=3\alpha-1$ $\therefore$ $\alpha^4=3\alpha^2-\alpha$

$$\therefore\ f(\alpha)=\frac{3\alpha^2-\alpha}{4}-\frac{3\alpha^2}{2}+\alpha=\frac{3}{4}(\alpha-\alpha^2)$$

$$=\frac{3}{4}\left(2\cos\frac{2\pi}{9}-4\cos^2\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}-1\right)$$

β,γ についても同様にして⑦に代入すると

$$\frac{2}{3}S=2\left(\cos\frac{4\pi}{9}-\cos\frac{8\pi}{9}-1\right)-\left(\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}-1\right)-\left(\cos\frac{8\pi}{9}-\cos\frac{16\pi}{9}-1\right)$$

$$=\cdots=3\left(\cos\frac{4\pi}{9}-\cos\frac{8\pi}{9}\right)=6\sin\frac{6\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}=3\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}$$

以上より $\boldsymbol{S=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{2\pi}{9}}$ …[証明了]

$(=5.010\cdots)$ ← この値は，上図の目視からも納得できる。