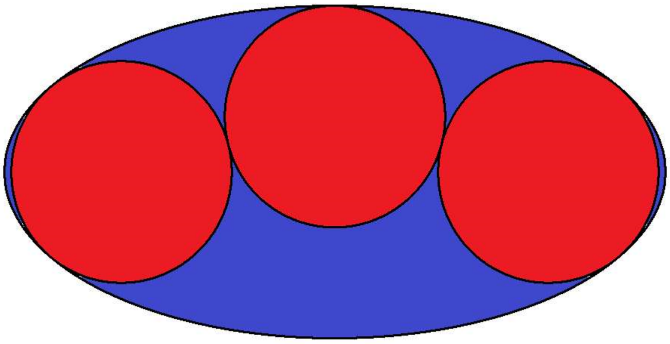
第 416 回　大垣八幡宮奉納算額 9

第 19 問題

与えられた楕円に 3 個の等円（赤）を容れるとき赤円の直径を求めよ。

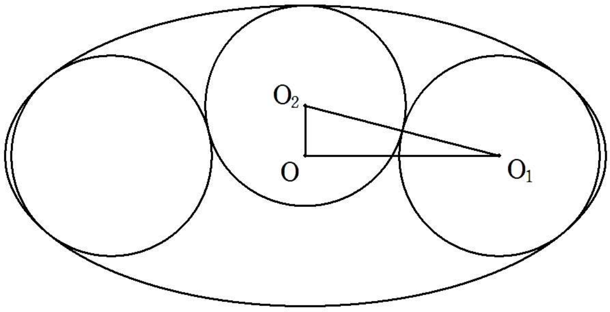


術文（答）

$$赤径=\frac{短軸}{2\left(\frac{短軸}{長軸}\right)^2+1}$$

解答　楕円の中心をO，長軸 $2a$，短軸 $2b$ とする。

赤円について，右と中央を，$O_1(r)$，$O_2(r)$ とする。



$OO_1=\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}}{b}=d$ とおく。

$\triangle O_2OO_1$ に三平方の定理を適用すると，

$O_2O^2=O_1O_2{}^2-d^2$　…①

また，$O_1O_2=2r$，$O_2O=AO-AO_2=b-r$

これを①に代入すると，$(b-r)^2=(2r)^2-\dfrac{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}{b^2}$

両辺に b^2 を掛け，r について整理すると，$(a^2+2b^2)r^2+2b^3r-a^2b^2=0$　$(r+b)\{(a^2+2b^2)r-a^2b\}=0$

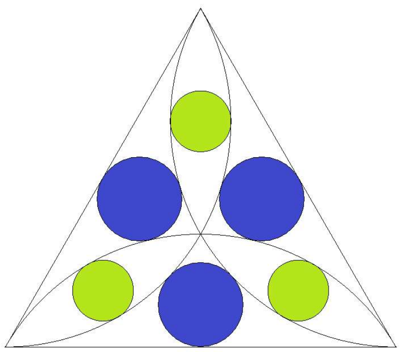
$r+b>0$ より，$r=\dfrac{a^2b}{a^2+2b^2}=\dfrac{b}{2\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}$

両辺に 2 を掛けると，$2r=\dfrac{2b}{2\left(\frac{2b}{2a}\right)^2+1}$　$i.e.$ $赤径=\dfrac{短軸}{2\left(\frac{短軸}{長軸}\right)^2+1}$　答

第 20 問題

正三角形内に等しい 3 弧を描いてその内に 3 個ずつ青円，萌黄円を容れる。

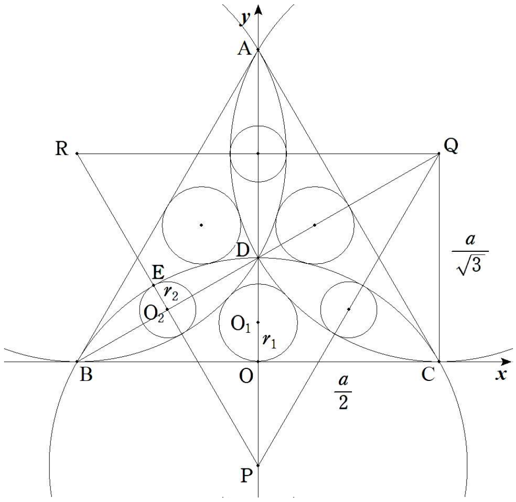
青円の直径を知って萌黄円の直径を求めよ。



術文（答）

$$萌黄径=\frac{16-\sqrt{192}}{3}(青径)$$

解答　正三角形を ABC とし，BC を x 軸，BC の垂直二等分線を y 軸，原点を O とし，図のように記号を付ける。正三角形の 1 辺を a，図に示す青円，萌黄円をそれぞれ $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ とおく。



円 O_1 の中心は $O_1(0,\ r_1)$，半径は r_1

$OC=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a}{2}$，$CD=\dfrac{1}{\sqrt{3}}BC=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ より，

円 Q の中心は，$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$，半径は $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

2 円が外接するとき，中心間の距離と半径の和は等しいから，

$O_1Q=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}-r_1\right)^2}=r_1+\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ より，$r_1=\dfrac{\sqrt{3}}{16}a$

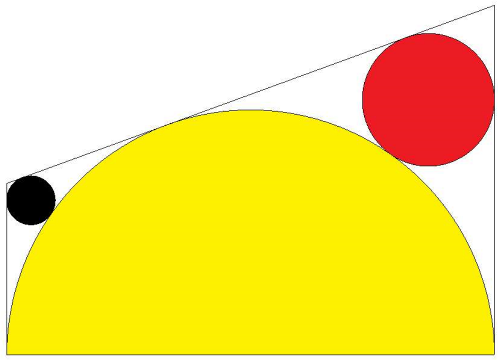
次に，$r_2=PE-PO_2=QC-BO=\dfrac{a}{\sqrt{3}}-\dfrac{a}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{6}a$

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{6}a}{\dfrac{\sqrt{3}}{16}a}=\frac{8(2-\sqrt{3})}{3}=\frac{16-\sqrt{192}}{3}\qquad \therefore r_2=\frac{16-\sqrt{192}}{3}r_1$$

よって，萌黄径＝$\dfrac{16-\sqrt{192}}{3}$（青径）　答

第 21 問題

梯形内に半円（黄）をつくりその内に赤円，黒円を内接させる。
赤円と黒円の直径を知って黄円の直径を求めよ。

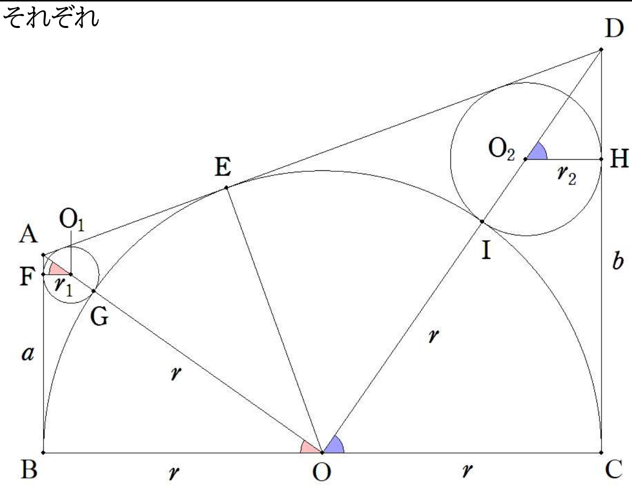


術文（答）

天＝赤径・黒径，地＝$\dfrac{赤径＋黒径}{2}+2\sqrt{天}$

とおくと，黄径＝地＋$\sqrt{地^2-天}$

解答　梯形に図のように記号を付け，黄半円，黒円，赤円をそれぞれ $O(r)$，$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$AB=a$，$CD=b$ とおく。



△ABO∽△OCD より，$\dfrac{r}{a}=\dfrac{b}{r}$　$\therefore ab=r^2$　…①

△ABO において，三平方の定理により，

$AO=\sqrt{a^2+r^2}$　…①

$△AFO_1∽△ABO$ であるから，$\dfrac{AO_1}{r_1}=\dfrac{\sqrt{a^2+r^2}}{r}$

$\therefore AO_1=\dfrac{r_1}{r}\sqrt{a^2+r^2}$

$AO=AO_1+O_1G+GO=\dfrac{r_1}{r}\sqrt{a^2+r^2}+r_1+r$　…②

①，②より，$\dfrac{r_1}{r}\sqrt{a^2+r^2}+r_1+r=\sqrt{a^2+r^2}$

整理すると，$r(r+r_1)=(r-r_1)\sqrt{a^2+r^2}$

両辺を2乗して a について整理すると，$a^2(r-r_1)^2=4r^3r_1$

$a>0$，$r>r_1>0$ より，$a=\dfrac{2r\sqrt{rr_1}}{r-r_1}$ …③

同様に，DO$=\sqrt{b^2+r^2}$，$\triangle DHO_2 \backsim \triangle DCO$ であるから，$b=\dfrac{2r\sqrt{rr_2}}{r-r_2}$ …④

③，④を①に代入すると，$\dfrac{2r\sqrt{rr_1}}{r-r_1}\cdot\dfrac{2r\sqrt{rr_2}}{r-r_2}=r^2$ $(r-r_1)(r-r_2)=4\sqrt{r_1r_2}\,r$

$\therefore r^2-(r_1+r_2+4\sqrt{r_1r_2})r+r_1r_2=0$

判別式 $D=(r_1+r_2+4\sqrt{r_1r_2})^2-4r_1r_2=(r_1+r_2+4\sqrt{r_1r_2}+2\sqrt{r_1r_2})\ (r_1+r_2+4\sqrt{r_1r_2}-2\sqrt{r_1r_2})$

$=(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2(r_1+r_2+6\sqrt{r_1r_2})$ …⑤

よって，$r=\dfrac{r_1+r_2+4\sqrt{r_1r_2}\pm(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})\sqrt{r_1+r_2+6\sqrt{r_1r_2}}}{2}$

複号を決めるために，$r_1=r_2$ とおいてみる。$r=\dfrac{6r_1\pm2\sqrt{r_1}\cdot2\sqrt{2r_1}}{2}=(3\pm2\sqrt{2})r_1$ となる。

$r_1=r_2$ のとき，△ABO は直角二等辺三角形となるから，AO$=\sqrt{2}\,r$

②より，$\sqrt{2}r_1+r_1+r=\sqrt{2}\,r$ $\therefore r=(3+2\sqrt{2})r_1$

よって，複号は＋の方であるから，$r=\dfrac{r_1+r_2+4\sqrt{r_1r_2}+(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})\sqrt{r_1+r_2+6\sqrt{r_1r_2}}}{2}$ …⑥となる。

最後に，術文を文字式に直して⑥と比較してみる。

黄径$=2r$，黒径$=2r_1$，赤径$=2r_2$ であるから，天＝赤径・黒径$=2r_2\cdot2r_1=4r_1r_2$

地$=\dfrac{\text{赤径}+\text{黒径}}{2}+2\sqrt{\text{天}}=\dfrac{2r_2+2r_1}{2}+2\sqrt{4r_1r_2}=r_1+r_2+4\sqrt{r_1r_2}$

黄径＝地$+\sqrt{\text{地}^2-\text{天}}$ より，$2r=r_1+r_2+4\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{(r_1+r_2+4\sqrt{r_1r_2})-4r_1r_2}$

⑤より，$r=\dfrac{r_1+r_2+4\sqrt{r_1r_2}+(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})\sqrt{r_1+r_2+6\sqrt{r_1r_2}}}{2}$ となり，⑥と同じになった。

よって，天＝赤径・黒径，地$=\dfrac{\text{赤径}+\text{黒径}}{2}+2\sqrt{\text{天}}$ とおくと，黄径＝地$+\sqrt{\text{地}^2-\text{天}}$ 答

(2022/7/24 ジョーカー)