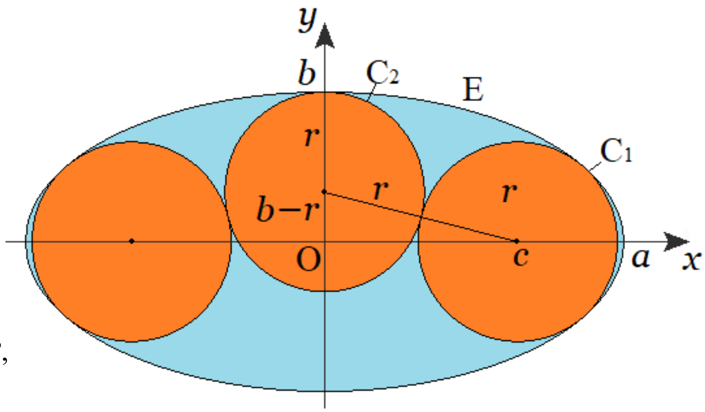
● 問題 416 解答＜三角定規＞

（計算の途中経過をかなり省略しました）

［第19問題］



題意より，右図のように諸量を定め

楕円 E： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ …①

円 C_1： $(x-c)^2+y^2=r^2$ …②

円 C_2： $x^2+(y-(b-r))^2=r^2$ …③

とできる。

①②から y^2 を消去して整理し，$a^2=A$，$b^2=B$，$c^2=C$，$r^2=R$ と置くと

$(A-B)x^2-2Acx+A(B+C-R)=0$ …④

E と C1 が接する ⇔ ④が重解をもつから

$\dfrac{D}{4}=A^2C-A(A-B)(B+C-R)=0$ …⑤

⑤を整理して，$R=B-\dfrac{BC}{A-B}$ …⑥

また②③が外接するから，図より

$(b-r)^2+c^2=(2r)^2$

$\therefore\ b^2-2br+r^2+c^2=4r^2$

$\therefore\ B-2br+C=3R$ …⑦

⑥を⑦の右辺に代入し

$B-2br+C=3B-\dfrac{3BC}{A-B}$ …⑧

⑧を C について解いて整理すると

$C=\dfrac{4B(A+B)(A-B)}{(A+2B)^2}$ …⑨

⑨を⑥に戻して

$R=B-\dfrac{4B^2(A+B)}{(A+2B)^2}=\dfrac{A^2B}{(A+2B)^2}$ …⑩

⑩両辺の $\sqrt{\ }$ をとり

$r=\dfrac{a^2b}{a^2+2b^2}=\dfrac{b}{1+\dfrac{2b^2}{a^2}}$

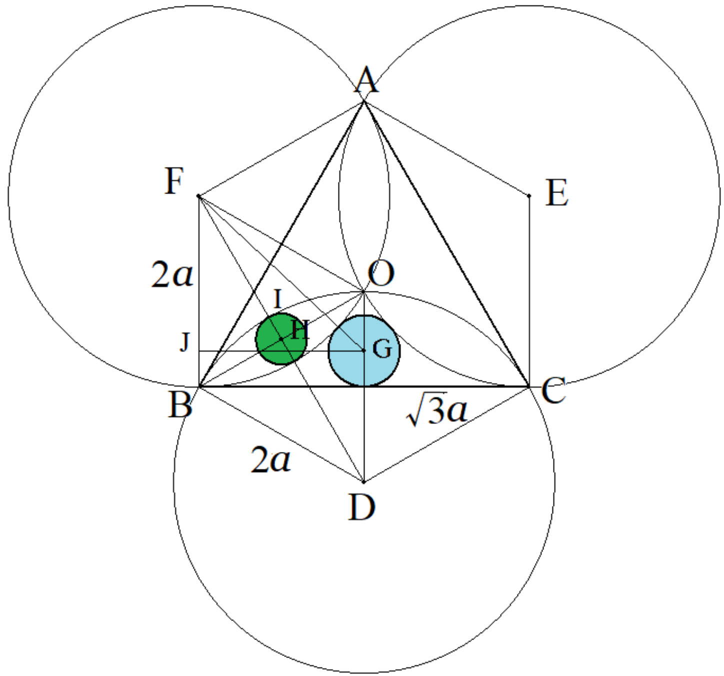
以上より， 赤径$=\dfrac{\text{短径}}{1+2\left(\dfrac{\text{短径}}{\text{長径}}\right)^2}$ …[答]

[第20問題]

右図のように各点を定める。

正三角形 ABC の 1 辺を $2\sqrt{3}\,a$ とすると，3 つの円の半径は $2a$ 。

また，△OBD, △OBF は 1 辺が $2a$ の正三角形である。



よって，萌黄円の **半径** は

$\mathrm{HI}=\mathrm{DI}-\mathrm{DH}=(2-\sqrt{3})a$ …①

青円の **半径** を r とすると,△ FGJ は直角三角形だから

$\mathrm{FG}^2=\mathrm{GJ}^2+\mathrm{FJ}^2$

$\therefore\ (2a+r)^2=(\sqrt{3}\,a)^2+(2a-r)^2$

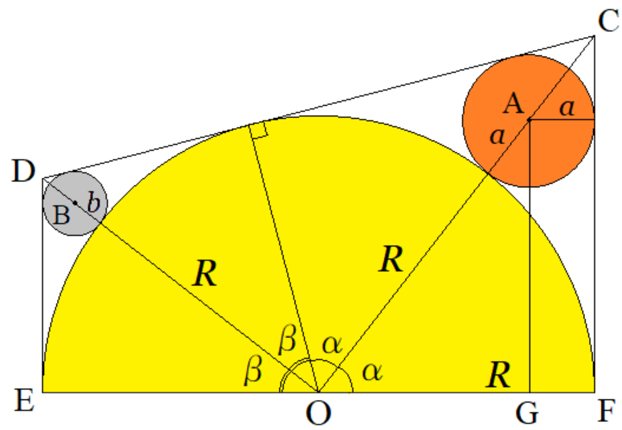
これを解いて　$r=\dfrac{3}{8}a$ …②

$\dfrac{①}{②}=\dfrac{8(2-\sqrt{3})}{3}=\dfrac{16-\sqrt{192}}{3}$

以上より，　萌黄径$=\boldsymbol{\dfrac{16-\sqrt{192}}{3}}$**・青径** …[答]

[第21問題]

右図のように各点および角 α, β を定め, 黄, 赤, 黒 3 円の**半径**を R, a, b とする。



図において, OF ＝ OG ＋ GF

$$\therefore\ R=(R+a)\cos\alpha+a$$

$$(1-\cos\alpha)R=(1+\cos\alpha)a$$

$$\therefore\ \frac{a}{R}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)}=\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

同様にして $\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{b}{R}$

$$\therefore\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{a}{R}},\ \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{b}{R}}$$

図より $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$ だから, $tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{tan(\alpha/2)+tan(\beta/2)}{1-tan(\alpha/2)tan(\beta/2)}=1$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{a}{R}}+\sqrt{\frac{b}{R}}=1-\sqrt{\frac{a}{R}}\sqrt{\frac{b}{R}}$$

両辺を平方し整理すると

$$R^2-(a+b+4\sqrt{ab})R+ab=0 \quad \cdots(*)$$

これを解いて

$$R=\frac{1}{2}\{a+b+4\sqrt{ab}\pm\sqrt{(a+b+4\sqrt{ab})^2-4ab}\} \quad \cdots(**)$$

(**) において, 複号＋の解を R_1, －の解を R_2 とする。

(*) より $R_1R_2 = ab$ であるが, (**) より明らかに $R_1 > a$ だから $R_2 < b$。これは不適。

ここで,

$$天＝赤径\cdot黒径＝4ab,\ 地＝\frac{赤径＋黒径}{2}+2\sqrt{天}=a+b+4\sqrt{ab} \quad だから$$

$$黄径＝2R_1＝\mathbf{地}+\sqrt{\mathbf{地}^2-\mathbf{天}} \quad \cdots[答]$$