● 問題 416 〈追加問題〉 解答＜三角定規＞

(1)

$$x^4+68x^3+kx^2-4930x+2023=0 \quad \cdots①$$

$$x^4+17\cdot4x^3+kx^2-17\cdot290x+17\cdot119=0 \quad \cdots①'$$

4 次方程式は複素数の範囲で 4 つの解をもつから, それを α, β, γ, δ とする。このとき

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\{x^2-(\gamma+\delta)+\gamma\delta\}=0$$

$\alpha\beta=-17$, $\gamma\delta=-119$ として一般性を失わず, $\alpha+\beta=a$, $\gamma+\delta=b$ とすると

$$(x^2+ax-17)(x^2+bx-119)$$
$$=x^4+(a+b)x^3+(ab-136)x^2-(119a+17b)x+17\cdot119=0 \quad \cdots②$$

①②の係数を比較して

$$\begin{cases} a+b=17\cdot4 & \cdots③ \\ ab-136=k & \cdots④ \\ 119a+17b=17\cdot290 & \cdots⑤ \end{cases}$$

③⑤を連立させて解き, $a=37$, $b=31$

これを④に戻して $k=37\cdot31-136=\mathbf{1011}$ …[答]

(2)

$(x^2+37x-17)(x^2+31-119)=0$ より,

$$x=\frac{\mathbf{-37\pm\sqrt{3\cdot479}}}{\mathbf{2}},\quad \frac{\mathbf{-31\pm\sqrt{3\cdot479}}}{\mathbf{2}} \quad \cdots[答]$$