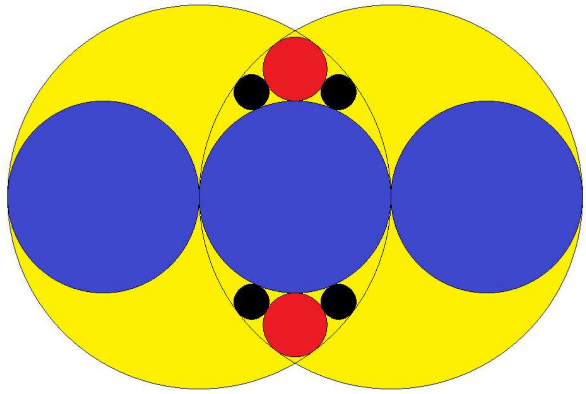
第419回

第28問題

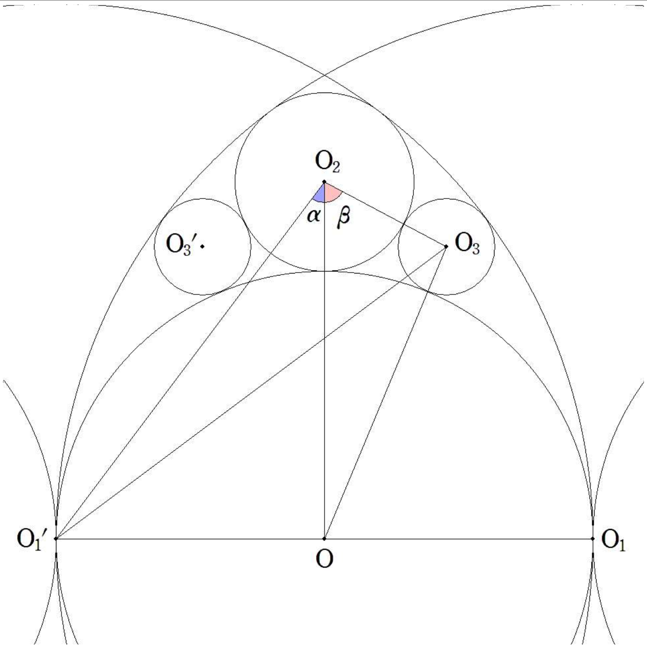
互いに中心を通る2等円（黄）に3個の等円（青）をつくり，それに赤円2個，黒円4個を容れる。青円径を知って黒円径を求めよ。



術文（答）

黒円径$=\dfrac{1}{5.5}$(青円径)

解答　中央の青円の周りの円に図のように記号を付ける。



青円O(r)とおくと，黄円$O_1(2r)$，赤円$O_2(r_2)$，黒円(r_3)，

$\angle O_1'O_2O=\alpha$，$\angle OO_2O_3=\beta$とおく。

$\triangle O_2O_1'O$について，$O_1'O=r$，$OO_2=r+r_2$，

$O_2O_1'=2r-r_2$であるから，三平方の定理により，

$r^2+(r+r_2)^2=(2r-r_2)^2 \quad \therefore r_2=\dfrac{r}{3} \quad \cdots$①

$\triangle OO_2O_1'$に余弦定理を適用すると，

$$\cos\alpha=\frac{(r+r_2)^2+(2r-2r_2)^2-r^2}{2(r+r_2)(2r-r_2)}=\frac{4}{5}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$$

$\triangle O_3O_2O$に余弦定理を適用すると，

$$\cos\beta=\frac{(r_2+r_3)^2+(r_2+r)^2-(r+r_3)^2}{2(r_2+r_3)(r_2+r)}=\frac{2r-3r_3}{2(r+3r_3)}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{3\sqrt{r_3(4r+3r_3)}}{2(r+3r_3)}$$

$\triangle O_3O_2O_1'$に余弦定理を適用すると，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{(2r-r_2)^2+(r_2+r_3)^2-(2r-r_3)^2}{2(2r-r_2)(r_2+r_3)}=\dfrac{-5r+21r_3}{5(r+3r_3)}$

これらを加法定理$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$に代入すると，

$$\frac{-5r+21r_3}{5(r+3r_3)}=\frac{4}{5}\cdot\frac{2r-3r_3}{2(r+3r_3)}-\frac{3}{5}\cdot\frac{3\sqrt{r_3(4r+3r_3)}}{2(r+3r_3)}$$

分母を払って整理すると，$\sqrt{r_3(4r+3r_3)}=2(r-3r_3)$

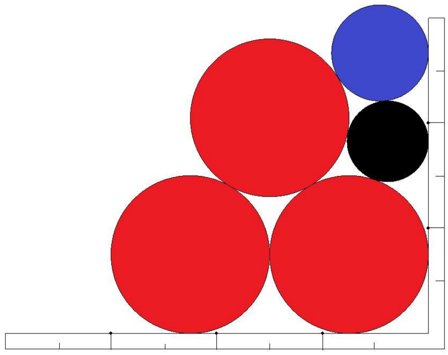
両辺を2乗して移項すると，$(3r_3-2r)(11r_3-2r)=0 \quad \therefore r_3=\dfrac{2}{3}r,\ \dfrac{2}{11}r$

$r_3<r_2=\dfrac{r}{3}$より，$r_3=\dfrac{2}{11}r=\dfrac{1}{5.5}r$

よって，黒円径$=\dfrac{1}{5.5}$(青円径)　答

第29問題

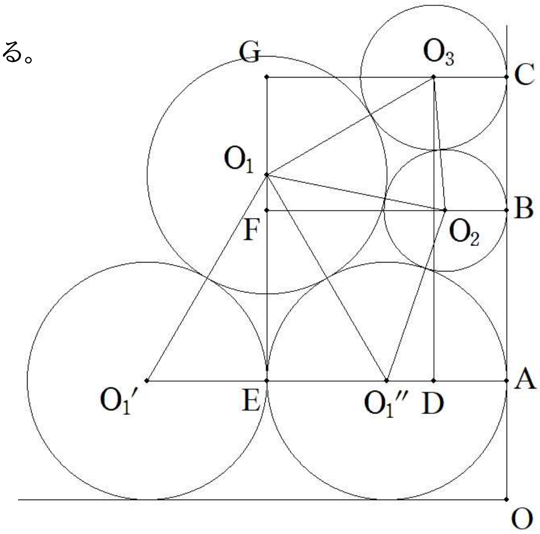
直交する二直線に接し互いに外接する3個の等円（赤）をつくり，
その間に青円と黒円を容れる。
青円の直径を知って黒円径を求めよ。



術文（答）

$$\text{黒円径}=\frac{(3-\sqrt{2})^2}{3}(\text{青円径})$$

解答　図のように記号を付ける。



赤円を $O_1(r_1)$，$O_1'(r_1)$，$O_1''(r_1)$，黒円 $O_2(r_2)$，青円 $O_3(r_3)$ とする。

$\triangle O_1FO_2$ について，$O_1F=O_1E-BA=\sqrt{3}r_1-2\sqrt{r_1r_2}$，

$O_1O_2=r_1+r_2$ であるから，三平方の定理により，

$FO_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(\sqrt{3}r_1-2\sqrt{r_1r_2})^2}$　…①

一方，$FO_2=FB-O_2B=2r_1-r_2$　…②

①，②より，$\sqrt{(r_1+r_2)^2-(\sqrt{3}r_1-2\sqrt{r_1r_2})^2}=2r_1-r_2$

両辺を2乗すると，$(r_1+r_2)^2-(\sqrt{3}r_1-2\sqrt{r_1r_2})^2=(2r_1-r_2)^2$

展開して整理すると，$3r_1-2\sqrt{3}\sqrt{r_1r_2}-r_2=0$

$$\therefore r_1=\frac{3+2\sqrt{2}}{3}r_2=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{3}r_2 \quad \cdots③$$

$\triangle O_1O_3G$ に三平方の定理を適用して，$GO_1=\sqrt{(r_1+r_3)^2-(2r_1-r_3)^2}=\sqrt{3r_1(2r_3-r_1)}$ であるから，

$GE=GO_1+O_1E=\sqrt{3r_1(2r_3-r_1)}+\sqrt{3}r_1$　…④

$CA=CB+BA=2\sqrt{r_2r_3}+2\sqrt{r_1r_2}$　…⑤

$GE=CA$であるから，④，⑤より，$\sqrt{3r_1(2r_3-r_1)}+\sqrt{3}r_1=2\sqrt{r_2r_3}+2\sqrt{r_1r_2}$　…⑥

③を代入し，両辺に $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{r_2}}$ を掛けて整理すると，$(1+\sqrt{2})\sqrt{6r_3-(3+2\sqrt{2})r_2}=2\sqrt{3}\sqrt{r_3}-\sqrt{r_2}$

両辺を2乗して整理すると，$(9+6\sqrt{2})r_2-2\sqrt{3}\sqrt{r_2r_3}-(3+6\sqrt{2})r_3=0$

両辺を r_3 で割り，$\sqrt{\dfrac{r_2}{r_3}}=x$ とおくと，$3(3+2\sqrt{2})x^2-2\sqrt{3}x-3(1+2\sqrt{2})=0$

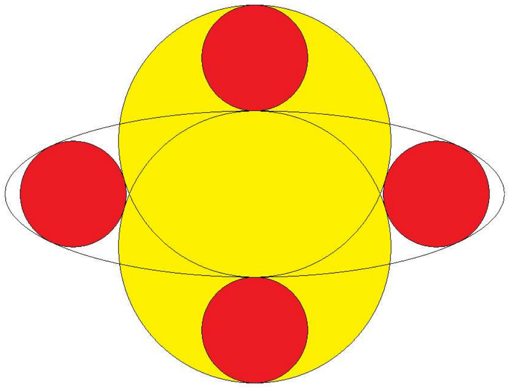
両辺に $3-2\sqrt{2}$ を掛けると，$3x^2-2\sqrt{3}(3-2\sqrt{2})x-3(-5+4\sqrt{2})=0$

$$x=\frac{\sqrt{3}(3-2\sqrt{2})\pm\sqrt{3(3-2\sqrt{2})^2+9(-5+4\sqrt{2})}}{3}=\frac{\sqrt{3}(3-2\sqrt{2})\pm\sqrt{6}}{3}=\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \frac{3-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$x>0$ より，$x=\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　$x^2=\dfrac{r_2}{r_3}=\dfrac{(3-\sqrt{2})^2}{3}$　$\therefore r_2=\dfrac{(3-\sqrt{2})^2}{3}r_3$

よって，黒円径$=\dfrac{(3-\sqrt{2})^2}{3}$(青円径)　答

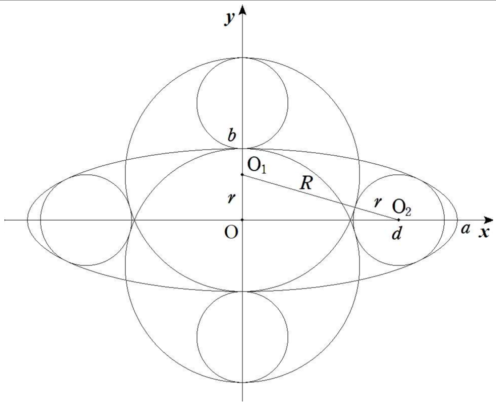
第30問題
楕円の短軸の端に接する2個の等円（黄）をつくり
この楕円と黄円に接する4個の等円（赤）を描く。
楕円の長軸と短軸との長さを知って黄円径を求めよ。



術文（答）

$$黄径=\frac{短軸}{\left(\frac{短軸}{長軸}\right)^2+0.5}$$

解答　楕円の中心を原点に与えられた図形を座標平面に置く。



上側の黄円，右側の赤円をそれぞれ $O_1(R)$，$O_2(r)$ とおく。

$OO_2=d$ とおくと，$d=\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}}{b}$　(*2)　…①である。

黄円の直径は，$2R=2r+2b$ より，$R=r+b$　…②　$\therefore OO_1=r$

$\triangle O_1OO_2$ について，$O_1O_2=R+r=2r+b$ であるから，

三平方の定理により，$(2r+b)^2=r^2+d^2$

①を代入すると，$(2r+b)^2=r^2+\dfrac{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}{b^2}$

分母を払って r について整理すると，$(a^2+2b^2)r^2+4b^3r-b^2(a^2-2b^2)=0$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & b & \longrightarrow & a^2b+2b^3 \\ a^2+2b^2 & & -b(a^2-2b^2) & \longrightarrow & -a^2b+2b^3 \\ \hline & & & & 4b^3 \end{array}$$

因数分解すると，$(r+b)\{(a^2+2b^2)r-b(a^2-2b^2)\}=0$

$r+b>0$ より，$r=\dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}$

これを②に代入すると，$R=\dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}+b=\dfrac{2a^2b}{a^2+2b^2}=\dfrac{b}{\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$

両辺に2を掛けると，$2R=\dfrac{2b}{\left(\dfrac{2b}{2a}\right)^2+0.5}$　*i.e.* $黄径=\dfrac{短軸}{\left(\dfrac{短軸}{長軸}\right)^2+0.5}$　答

(*2) 楕円と円（中心が長軸上にあり，半径 r）が接する条件

楕円の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と円の方程式 $(x-d)^2+y^2=r^2$ から y^2 を消去すると，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{r^2-(x-d)^2}{b^2}=1$

分母を払って整理すると，$(a^2-b^2)x^2-2a^2dx+a^2(b^2+d^2-r^2)=0$

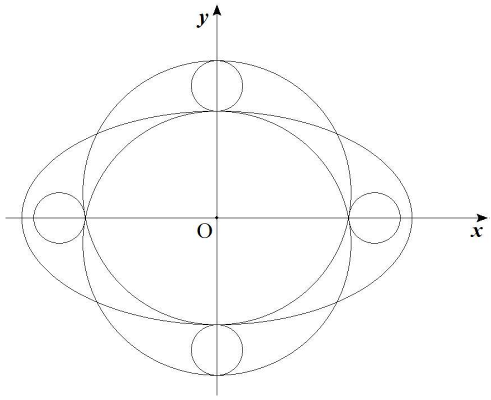
判別式を D とおくと，接するから $D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=(a^2d)^2-(a^2-b^2)\cdot a^2(b^2+d^2-r^2)=a^2\{b^2d^2-(a^2-b^2)(b^2-r^2)\}=0$ より，$d^2=\dfrac{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}{b^2}$

$d>0$ より，$d=\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}}{b}$　■

補足　a，b の値によっては，左右の赤円が楕円に接しない場合がある。

右図は，$a=1$，$b=\dfrac{5}{9}$ のときである。



$r=\dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}$ は曲率円（長軸の端で接する最大円）の半径 $\dfrac{b^2}{a}$ より

大きくなければならない。$\dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2} \geqq \dfrac{b^2}{a}$

$\dfrac{b}{a}=t$ とおくと（$0<t<1$），$2t^3+2t^2+t-1 \leqq 0$

$f(t)=2t^3+2t^2+t-1$ とおく。

$f'(t)=6t^2+4t+1=2t^2+(2t+1)^2>0$ より，$f(t)$ は単調増加関数で，

$f(0)=-1<0$，$f(1)=4>0$ より，方程式 $f(t)=0$ の解は $0<t<1$ の範囲に 1 個だけである。

次に，$2t^3+2t^2+t-1=0$ の実数解を求める。

両辺に 2^2 を掛け，$2t=u$ とおくと，$u^3+2u^2+2u-4=0$

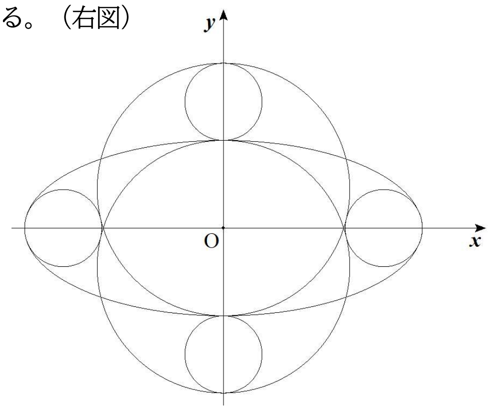
$u=\dfrac{v-2}{3}$ とおくと，$v^3+6v-128=0$ （$p=6$，$q=-128$ のとき，$\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}=6\sqrt{114}$ である。）

カルダノの公式を適用すると，実数解は，$v=\sqrt[3]{64-6\sqrt{114}}+\sqrt[3]{64+6\sqrt{114}}$

$\therefore t=\dfrac{\sqrt[3]{64-6\sqrt{114}}+\sqrt[3]{64+6\sqrt{114}}-2}{6}$

よって，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\text{短軸}}{\text{長軸}} \leqq \dfrac{\sqrt[3]{64-6\sqrt{114}}+\sqrt[3]{64+6\sqrt{114}}-2}{6}$ （$\fallingdotseq 0.44062$）の条件が必要である。

等号のとき，左右の赤円は楕円の長軸の端で接する最大円（曲率円）となる。（右図）



(2022/10/16　ジョーカー)