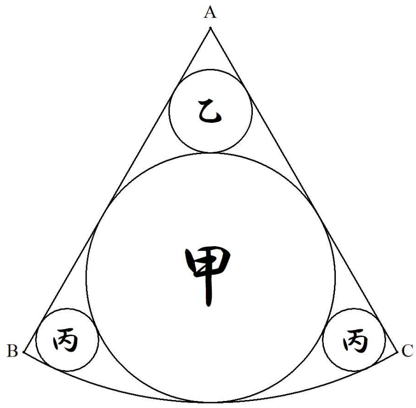
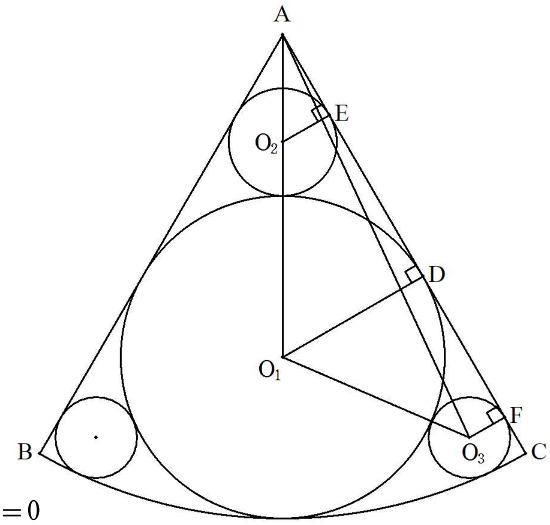
第 419 回追加問題

A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧 BCは半径1の円弧である。
この図形の中に図のように互いに接する甲乙丙円
を配置する。
甲乙丙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　甲乙丙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle AO_1D$ について，$\angle AO_1D=60^\circ$ であるから，$AO_1=2\,O_1D$

$AO_1=1-r_1$，$O_1D=r_1$ であるから，$1-r_1=2r_1$　$\therefore r_1=\dfrac{1}{3}$

$\triangle AO_2E$ について，$\angle AO_2E=60^\circ$ であるから，$AO_2=2\,O_2E=2r_2$

$AO_1=2r_2+r_2+r_1=2r_1$ より，$r_2=\dfrac{1}{3}r_1=\dfrac{1}{9}$

次に，$\triangle O_3AF$について，$AO_3=1-r_3$，$O_3F=r_3$，

$AF=AD+DF=\sqrt{3}r_1+2\sqrt{r_1r_3}$ であるから三平方の定理により，

$r_3{}^2+(\sqrt{3}r_1+2\sqrt{r_1r_3})^2=(1-r_3)^2$

r_3 について整理すると，$2(1+2r_1)r_3+4\sqrt{3}r_1\sqrt{r_1}\sqrt{r_3}+3r_1{}^2-1=0$

$r_1=\dfrac{1}{3}$ を代入して整理すると，$5r_3+2\sqrt{r_3}-1=0$　$\therefore\sqrt{r_3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{6}}{5}$

$\sqrt{r_3}>0$ より，$\sqrt{r_3}=\dfrac{-1+\sqrt{6}}{5}$　$\therefore r_3=\dfrac{7-2\sqrt{6}}{25}$　（≒ 0.0840408）

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{1}{3}$，乙：$\dfrac{1}{9}$，丙：$\dfrac{7-2\sqrt{6}}{25}$　答

$\triangle ABC$の垂心，外心をそれぞれ H，Oとする。$\cos A=k_1$，$\cos B=k_2$，$\cos C=k_3$ のとき，
次のベクトルを $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{AH}$

(2)　$\overrightarrow{AO}$

解答　$\cos A=k_1$，$\cos B=k_2$，$\cos C=k_3$ のとき，$\sin A=\sqrt{1-k_1{}^2}$，$\sin B=\sqrt{1-k_2{}^2}$，

$\sin C=\sqrt{1-k_3{}^2}$，$\tan A=\dfrac{\sqrt{1-k_1{}^2}}{k_1}$，$\tan B=\dfrac{\sqrt{1-k_2{}^2}}{k_2}$，$\tan C=\dfrac{\sqrt{1-k_3{}^2}}{k_3}$ である。

また，$|\vec{b}|=c$，$|\vec{c}|=b$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos A=cb\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ である。

$\triangle ABC=S$ とおくと，$(4S)^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ である。

(1) $\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおく。

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ より，$(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ $\quad(s-1)\vec{b}\cdot\vec{c}+t\vec{c}\cdot\vec{c}=0$ $\quad(s-1)\cdot bc\cos A+tb^2=0$

$\therefore s+\dfrac{b}{c\cos A}t=1\quad\cdots$①

同様に，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より，$(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$ $\quad s\vec{b}\cdot\vec{b}+(t-1)\vec{c}\cdot\vec{b}=0$ $\quad sc^2+(t-1)\cdot bc\cos A=0$

$\therefore \dfrac{c}{b\cos A}s+t=1\quad\cdots$②

②$\times\dfrac{b}{c\cos A}$ $-$①より，$\left(\dfrac{1}{\cos^2 A}-1\right)s=\dfrac{b}{c\cos A}$

$s\tan^2 A=\dfrac{b-c\cos A}{c\cos A}=\dfrac{a\cos C}{c\cos A}=\dfrac{\sin A\cos C}{\sin C\cos A}=\dfrac{\tan A}{\tan C}\quad\therefore s=\dfrac{1}{\tan A\tan C}$

同様に，①$\times\dfrac{c}{b\cos A}$ $-$②より，$t=\dfrac{1}{\tan A\tan B}$

よって，$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\vec{b}}{\tan A\tan C}+\dfrac{\vec{c}}{\tan A\tan B}=\dfrac{1}{\tan A}\left(\dfrac{1}{\tan C}\vec{b}+\dfrac{1}{\tan B}\vec{c}\right)$ であるから，

$\overrightarrow{AH}=\dfrac{k_1}{\sqrt{1-k_1{}^2}}\left(\dfrac{k_3}{\sqrt{1-k_3{}^2}}\vec{b}+\dfrac{k_2}{\sqrt{1-k_2{}^2}}\vec{c}\right)$ 答

(2) AO と外接円との交点を F とし，$\overrightarrow{AO}=k\vec{b}+l\vec{c}$ とおくと，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AO}=2k\vec{b}+2l\vec{c}$

$\angle ABF=90^\circ$ より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ $\quad\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB})=0$ $\quad\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AB}|^2$

$\vec{b}\cdot(2k\vec{b}+2l\vec{c})=c^2$ $\quad 2kc^2+2l\times bc\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c^2$ $\quad 2c^2k+(b^2+c^2-a^2)l=c^2\quad\cdots$①

同様に，$\angle ACF=90^\circ$ より，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CF}=0$ $\quad\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC})=0$ $\quad\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AC}|^2$

$\vec{c}\cdot(2k\vec{b}+2l\vec{c})=b^2$ $\quad 2k\times bc\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+2lc^2=c^2$ $\quad(b^2+c^2-a^2)k+2c^2l=c^2\quad\cdots$②

①，②を連立させて，$k=\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}$，$l=\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{(4S)^2}$

ここで，$k=\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}=\dfrac{b^2\cdot 2ca\cos B}{2bc\sin A\cdot 2ab\sin C}=\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}$，同様に，$l=\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}$ より，

よって，$\overrightarrow{AO}=\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}\vec{b}+\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}\vec{c}=\dfrac{1}{2\sin A}\left(\dfrac{\cos B}{\sin C}\vec{b}+\dfrac{\cos C}{\sin B}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{1-k_1{}^2}}\left(\dfrac{k_2}{\sqrt{1-k_3{}^2}}\vec{b}+\dfrac{k_3}{\sqrt{1-k_2{}^2}}\vec{c}\right)$ 答

（ジョーカー）