第 419 回追加問題補足

△ABCの垂心，外心をそれぞれ H，Oとする。$\cos A=k_1$， $\cos B=k_2$， $\cos C=k_3$ のとき，

次のベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$， $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$

この問題の答として，(Y) と (J) は同値であるかどうか調べよ。

(1) $(Y)\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{k_1}{{k_1}^2-1}\left\{\left(k_1-\sqrt{\dfrac{1-{k_2}^2}{1-{k_3}^2}}\right)\vec{b}+\left(k_1-\sqrt{\dfrac{1-{k_3}^2}{1-{k_2}^2}}\right)\vec{c}\right\}$

$(J)\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{\tan A}\left(\dfrac{1}{\tan C}\vec{b}+\dfrac{1}{\tan B}\vec{c}\right)=\dfrac{k_1}{\sqrt{1-{k_1}^2}}\left(\dfrac{k_3}{\sqrt{1-{k_3}^2}}\vec{b}+\dfrac{k_2}{\sqrt{1-{k_2}^2}}\vec{c}\right)$

(2) $(Y)\ \overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{1}{2({k_1}^2-1)}\left\{\left(k_1\sqrt{\dfrac{1-{k_2}^2}{1-{k_3}^2}}-1\right)\vec{b}+\left(k_1\sqrt{\dfrac{1-{k_3}^2}{1-{k_2}^2}}-1\right)\vec{c}\right\}$

$(J)\ \overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{1}{2\sin A}\left(\dfrac{\cos B}{\sin C}\vec{b}+\dfrac{\cos C}{\sin B}\vec{c}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-{k_1}^2}}\left(\dfrac{k_2}{\sqrt{1-{k_3}^2}}\vec{b}+\dfrac{k_3}{\sqrt{1-{k_2}^2}}\vec{c}\right)$

解答　$\cos A=k_1$， $\cos B=k_2$， $\cos C=k_3$ のとき，$\sin A=\sqrt{1-{k_1}^2}$， $\sin B=\sqrt{1-{k_2}^2}$，

$\sin C=\sqrt{1-{k_3}^2}$， $\tan A=\dfrac{\sqrt{1-{k_1}^2}}{k_1}$， $\tan B=\dfrac{\sqrt{1-{k_2}^2}}{k_2}$， $\tan C=\dfrac{\sqrt{1-{k_3}^2}}{k_3}$ である。

(1) (Y) で，$\vec{b}$ の係数は，

$$\frac{k_1}{{k_1}^2-1}\left(k_1-\sqrt{\frac{1-{k_2}^2}{1-{k_3}^2}}\right)=\frac{\cos A}{-\sin^2 A}\left(\cos A-\frac{\sin B}{\sin C}\right)=\frac{1}{\sin A\tan A}\cdot\frac{\sin B-\cos A\sin C}{\sin C}$$

$$=\frac{1}{\sin A\tan A}\cdot\frac{\sin(A+C)-\cos A\sin C}{\sin C}=\frac{1}{\sin A\tan A}\cdot\frac{\sin A\cos C}{\sin C}=\frac{1}{\tan A\tan C}$$

$\vec{c}$ の係数も同様に，$\dfrac{k_1}{{k_1}^2-1}\left(k_1-\sqrt{\dfrac{1-{k_3}^2}{1-{k_2}^2}}\right)=\dfrac{1}{\tan A\tan B}$

よって，(Y) と (J) の答は，同値である。 答

(2) (Y) で，$\vec{b}$ の係数は，

$$\frac{1}{2({k_1}^2-1)}\left(k_1\sqrt{\frac{1-{k_2}^2}{1-{k_3}^2}}-1\right)=\frac{1}{-2\sin^2 A}\left(\cos A\cdot\frac{\sin B}{\sin C}-1\right)=\frac{1}{2\sin^2 A}\cdot\frac{\sin C-\cos A\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{1}{2\sin^2 A}\cdot\frac{\sin(A+B)-\cos A\sin B}{\sin C}=\frac{1}{2\sin^2 A}\cdot\frac{\sin A\cos B}{\sin C}=\frac{\cos B}{2\sin A\sin C}$$

$\vec{c}$ の係数も同様に，$\dfrac{1}{2({k_1}^2-1)}\left(k_1\sqrt{\dfrac{1-{k_3}^2}{1-{k_2}^2}}-1\right)=\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}$

よって，(Y) と (J) の答は，同値である。 答

(2022/11/1　ジョーカー)