● 問題 419 解答＜三角定規＞

［第28問題］

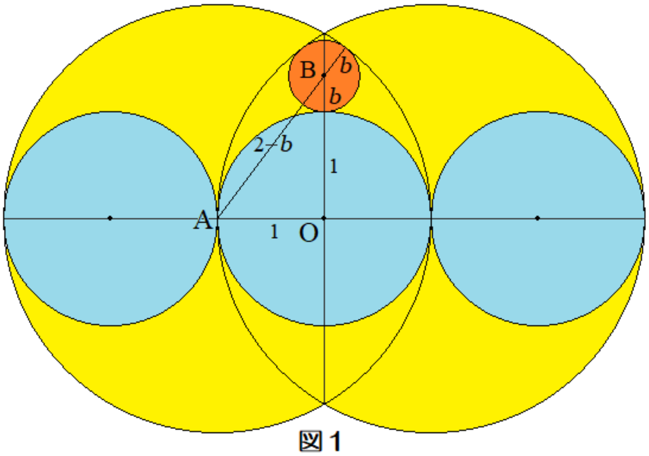

図1

青円の半径を 1，赤円の半径を b とする。また，黄円，赤円の中心を A, B とする（図1）。

△ OAB は直角三角形だから

$$(2-b)^2=1^2+(1+b)^2$$

これを解いて，$b=\dfrac{1}{3}$　…①

続いて，黒円の中心を C，半径を c とする。また，図２のように角 α，β，γ を定める。

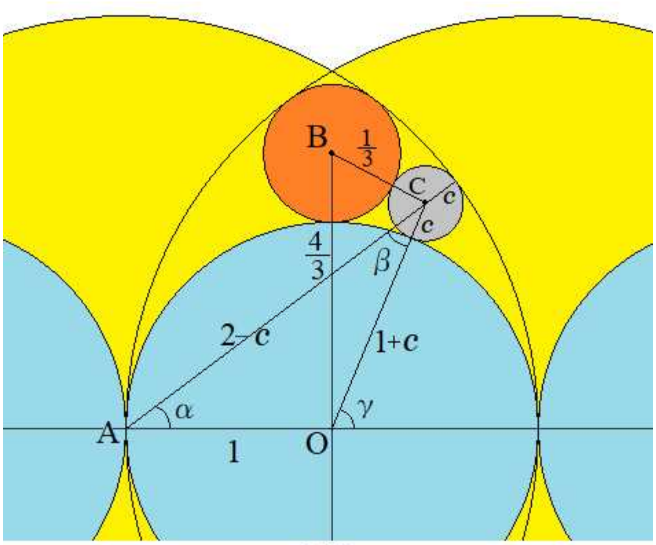

図２

△ OAC と角 α に余弦定理を適用し，

$$(1+c)^2=1^2+(2-c)^2-2\cdot1\cdot(2-c)\cos\alpha$$

整理して

$$\cos\alpha=\frac{1+(2-c)^2-(1+c)^2}{2(2-c)}=\frac{2-3c}{2-c}\quad\cdots②$$

このとき，$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2c(1-c)}}{2-c}$　…③

同様に，△ OAC と角 β に余弦定理を適用し，

$$\cos\beta=\frac{2-c+c^2}{(2-c)(1+c)}\quad\cdots④$$

このとき，$\sin\beta=\dfrac{2\sqrt{2c(1-c)}}{(2-c)(1+c)}$　…⑤

さらに，△ OBC と角 γ に余弦定理を適用し，

$$\left(\frac{1}{3}+c\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2+(1+c)^2-2\cdot\frac{4}{3}(1+c)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$$

整理して，$\sin\gamma=\dfrac{2+c}{2(1+c)}$　…⑥

$\alpha+\beta=\gamma$　より，$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　…⑦

②③④⑤⑥を⑦に代入し，

$$\frac{2+c}{2(1+c)}=\frac{2\sqrt{2c(1-c)}}{2-c}\cdot\frac{2-c+c^2}{(2-c)(1+c)}+\frac{2-3c}{2-c}\cdot\frac{2\sqrt{2c(1-c)}}{(2-c)(1+c)}$$

$$\therefore\ \frac{2+c}{2}=\frac{2\sqrt{2c(1-c)}}{2-c}\left(\frac{4-4c+c^2}{2-c}\right)=2\sqrt{2c(1-c)}$$

両辺を平方して　$(2+c)^2=16\cdot2c(1-c)$

整理して　$33c^2-28c+4=(11c-2)(3c-2)=0$　$\therefore\ c=\dfrac{2}{11},\ \dfrac{2}{3}$

$c=\dfrac{2}{3}$ は明らかに不適だから，$c=\dfrac{2}{11}$

以上より，**黒円径**$=\dfrac{2}{11}$(青円径)$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5.5}}$**(青円径)**　…[答]

[第30問題]

楕円の半長軸, 半短軸を a, b, 黄円の半径を r とする。このとき, 赤円の半径は $r-b$。

図1のように各点を定めると,点 C の座標 c は, △OAC が直角三角形だから,

$$(2r-b)^2=c^2+(r-b)^2$$

$$\therefore\ c=\sqrt{3r^2-2br}$$

楕円: $\dfrac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2$ …①

赤円C: $(x-\sqrt{3r^2-2br}\,)^2+y^2=(r-b)^2$ …②

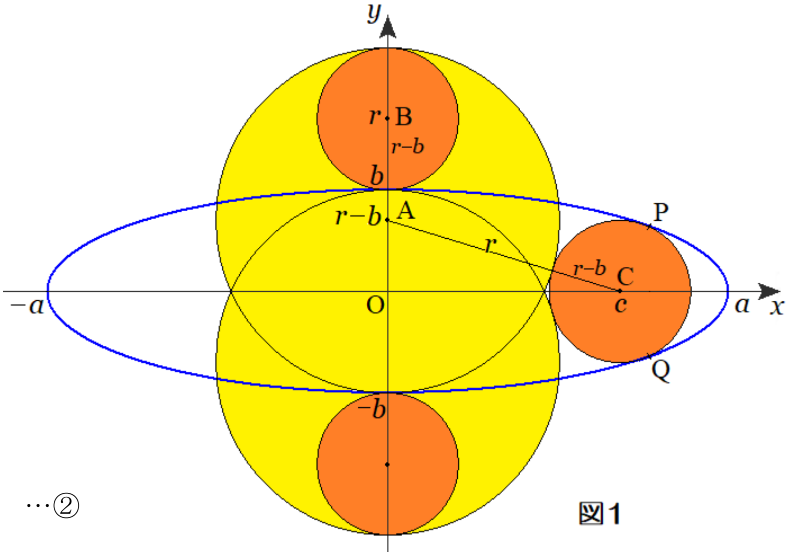

図1

(ⅰ) 楕円①と赤円 C ②が図のように **2 点 P, Q で接する**とき

①②から y を消去した x の 2 次方程式

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-2\sqrt{3r^2-2br}\cdot x+2r^2=0 \quad \cdots③$$

は重解をもつ。よって, 判別式

$$\frac{D}{4}=3r^2-2br-2r^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=2r\left\{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{2}\right)r-b\right\}=0$$

$r>0$ より, $r=\dfrac{b}{\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2a^2b}{a^2+2b^2}$ …④

このとき, P, Q の x 座標 x_0 は③の重解であり, $x_0<a$ であるから

$$x_0{}^2=\frac{2r^2}{1-b^2/a^2}<a^2 \quad \therefore\ 2r^2<a^2-b^2$$

④を代入し, $\dfrac{8a^4b^2}{(a^2+2b^2)^2}<a^2-b^2 \quad \therefore\ 8a^4b^2<(a^2-b^2)(a^2+2b^2)^2$

両辺を b^6 で割り $\dfrac{a^2}{b^2}=t$ と置くと, $8t^2<(t-1)(t+2)^2 \quad \therefore\ t^3-5t^2-4>0$ …⑤

3 次方程式 $t^3-5t^2-4=0$ は 1 つの実数解 $t=5.15\cdots$ をもつので, ⑤の解は $t>5.15$

よって $\dfrac{a}{b}>\sqrt{5.15\cdots}=2.269\cdots$

(ⅱ) 楕円①と赤円 C ②が図2のように**①の端点 R で接する**とき

$$a=c+r-b=\sqrt{3r^2-2br}+r-b$$

これを平方して整理し,

$$2r^2+2ar-(a+b)^2=0 \quad \therefore\ r=\frac{\sqrt{3a^2+4ab+2b^2}-a}{2} \quad \cdots⑥$$

このとき, R 点での楕円の曲率半径は円②の半径以上でなければならないから

$$\frac{b^2}{a}\geqq\frac{\sqrt{3a^2+4ab+2b^2}-a}{2}-b \quad \cdots⑦$$

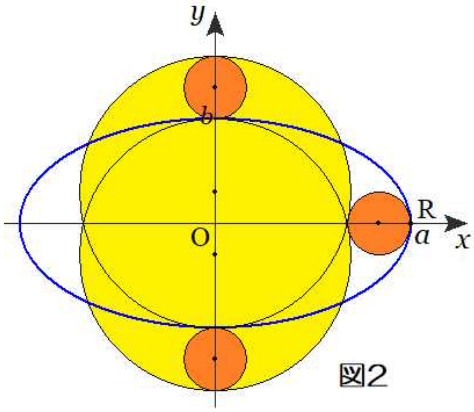

図2

⑦を整理して，$a^4-3a^2b^2-4ab^3-2b^4 \leqq 0$

両辺を b^4 で割り $\dfrac{a}{b}=u$ と置くと，$u^4-3u^2-4u-2 \leqq 0$

これを $u>0$ で力ずくで解くと　$u \leqq 2.269\cdots$　$\therefore\ \dfrac{a}{b} \leqq 2.269\cdots$

以上より

（ｉ）長軸＞2.27(短軸) のとき，**黄径**$=\dfrac{\textbf{短軸}}{\left(\dfrac{\textbf{短軸}}{\textbf{長軸}}\right)^{2}+\mathbf{0.5}}$

（ii）長軸≦2.27(短軸) のとき，**黄径**$=\dfrac{\textbf{長軸}}{\mathbf{2}}\left(\sqrt{\mathbf{3}+\mathbf{4}\left(\dfrac{\textbf{短軸}}{\textbf{長軸}}\right)+\mathbf{2}\left(\dfrac{\textbf{短軸}}{\textbf{長軸}}\right)^{2}}-\mathbf{1}\right)$

…［答］

※ WolframAlpha によれば

$t=5.15\cdots$ の厳密解は，$t=\dfrac{1}{3}\left\{5+\left(179+12\sqrt{114}\right)^{1/3}+\left(179-12\sqrt{114}\right)^{1/3}\right\}$

$u=2.269\cdots$ の厳密解は，$u=\dfrac{1}{3}\left\{1+\left(37+3\sqrt{114}\right)^{1/3}+\left(37-3\sqrt{114}\right)^{1/3}\right\}$

になるようです。