第 424 回

問題 1

座標平面において，円①を $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ ，円②を $x^2+y^2=100$ とする。

次の式の最小値と最大値を求めよ。

(1)　点 $(x,\ y)$ が①上を動くとき，　$x^2+y^2+2x-2y$

(2)　点 $(x,\ y)$ が①上を動くとき，　$\dfrac{y-1}{x+1}$

(3)　点 $(a,\ b)$ が①上を，点 $(c,\ d)$ が②上を動くとき，　$ac+bd$

解答

円①は，中心 C$(3,\ 4)$，半径 2 の円，円②は中心 O$(0,\ 0)$，半径 10 の円である

(1)　$x^2+y^2+2x-2y=k$ とおき変形すると，

$(x+1)^2+(y-1)^2=k+2$ …③

これは，中心 A$(-1,\ 1)$，半径 $\sqrt{k+2}$ の円を表す。

直線 AC と円①の交点を A に近い方から B，D とすると，

①と③が共有点をもつのは，③が線分 BD を通るときである。

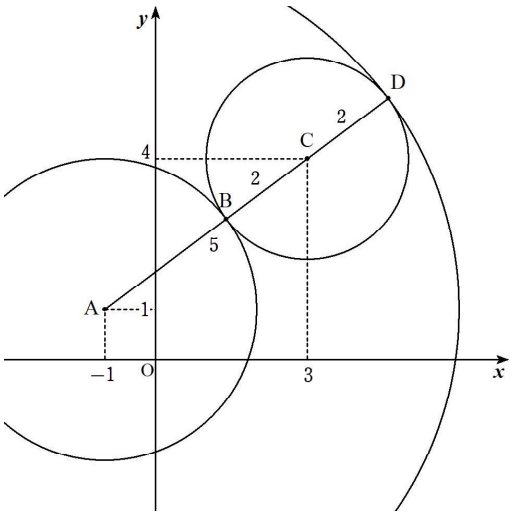
AC$=\sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2}=5$ であるから，

最小値：AB＝AC−2 より，　$\sqrt{k+2}=5-2$　　$\therefore k=7$

このとき，B は AC を 3:2 に内分する点であるから，B$\left(\dfrac{7}{5},\ \dfrac{14}{5}\right)$

最大値：AD＝AC+2 より，　$\sqrt{k+2}=5+2$　　$\therefore k=47$

このとき，D は AC を 7:2 に外分する点であるから，D$\left(\dfrac{23}{5},\ \dfrac{26}{5}\right)$



よって，最小値 7（$x=\dfrac{7}{5}$，　$y=\dfrac{14}{5}$ のとき），最大値 47（$x=\dfrac{23}{5}$，　$y=\dfrac{26}{5}$ のとき）　答

(2)　$\dfrac{y-1}{x+1}=k$ とおき，分母を払うと，

$kx-y+k+1=0$　…④

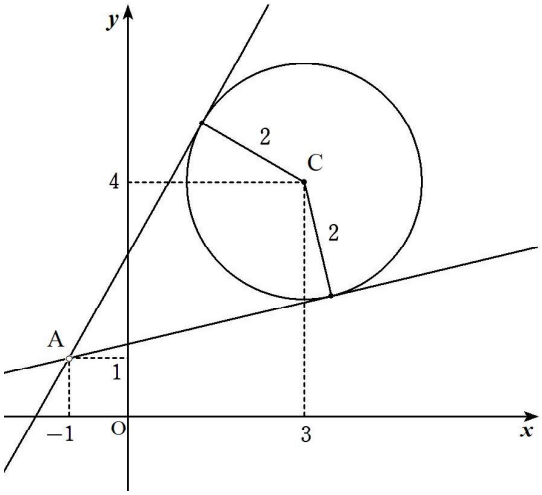
これは傾き k の直線を表す。ただし，点 A$(-1,\ 1)$ を除く。

C から④までの距離を 2 とおくと，

$\dfrac{|k\cdot 3-4+k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$　　$\therefore k=\dfrac{6\pm\sqrt{21}}{6}$

①と④が共有点をもつのは，

$\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}\leqq k\leqq\dfrac{6+\sqrt{21}}{6}$ のときである。



よって，

最小値 $\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}$　（$x=\dfrac{59+6\sqrt{21}}{25}$，　$y=\dfrac{8(11-\sqrt{21})}{25}$ のとき），

最大値 $\dfrac{6+\sqrt{21}}{6}$　（$x=\dfrac{59-6\sqrt{21}}{25}$，　$y=\dfrac{8(11+\sqrt{21})}{25}$ のとき）　答

(3)　$P(a,\ b)$，$Q(c,\ d)$ とおくと，

$ac+bd=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$

$OC-2\leqq|\overrightarrow{OP}|\leqq OC+2$ より，$3\leqq|\overrightarrow{OP}|\leqq 7$

また，$|\overrightarrow{OQ}|=10$，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから，

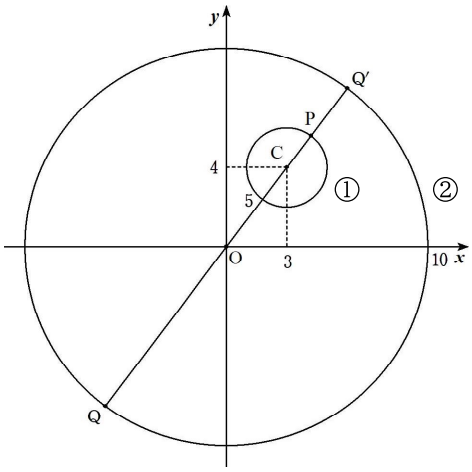
最小値は，$-|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|=-7\cdot 10=-70$，$P\left(\frac{21}{5},\ \frac{28}{5}\right)$，$Q(-6,\ -8)$

最大値は，$|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|=7\cdot 10=70$，$P\left(\frac{21}{5},\ \frac{28}{5}\right)$，$Q'(6,\ \cdot 8)$

よって，

最小値：-70（$a=\frac{21}{5}$，$b=\frac{28}{5}$，$c=-6$，$d=-8$ のとき），

最大値：70（$a=\frac{21}{5}$，$b=\frac{28}{5}$，$c=6$，$d=8$ のとき）　答



問題2

θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ を動くとき，$\dfrac{\sin\theta+3}{\cos\theta+2}$ の最小値と最大値を求めよ。

解答　$f(\theta)=\dfrac{\sin\theta+3}{\cos\theta+2}$ とおくと，

$$f'(\theta)=\frac{(\cos\theta+2)\cos\theta-(\sin\theta+3)(-\sin\theta)}{(\cos\theta+2)^2}=\frac{1+3\sin\theta+2\cos\theta}{(\cos\theta+2)^2}=\frac{1+\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)}{(\cos\theta+2)^2}$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$　$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f'(\theta)=0$ とおくと，$\sin(\theta+\alpha)=-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$　…①

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$ であるから，$\sin\theta_1=-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$　…②とおくと，

$\pi<\theta_1<\pi+\alpha$ より，$\cos\theta_1=-\sqrt{1-\sin^2\theta_1}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

①，②より，$\theta+\alpha=\theta_1$ より，$\theta=\theta_1-\alpha$ であるから，

$$\sin\theta=\sin(\theta_1-\alpha)=\sin\theta_1\cos\alpha-\cos\theta_1\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}-\left(-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{-3+4\sqrt{3}}{13},$$

$$\cos\theta=\cos(\theta_1+\alpha)=\cos\theta_1\cos\alpha+\sin\theta_1\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}=-\frac{2(1+3\sqrt{3})}{13}$$ より，

$$f(\theta)=\frac{\sin\theta+3}{\cos\theta+2}=\frac{\dfrac{-3+4\sqrt{3}}{13}+3}{-\dfrac{2(1+3\sqrt{3})}{13}+2}=\frac{2(9+\sqrt{3})}{3(4-\sqrt{3})}=\frac{2(3+\sqrt{3})}{3}$$

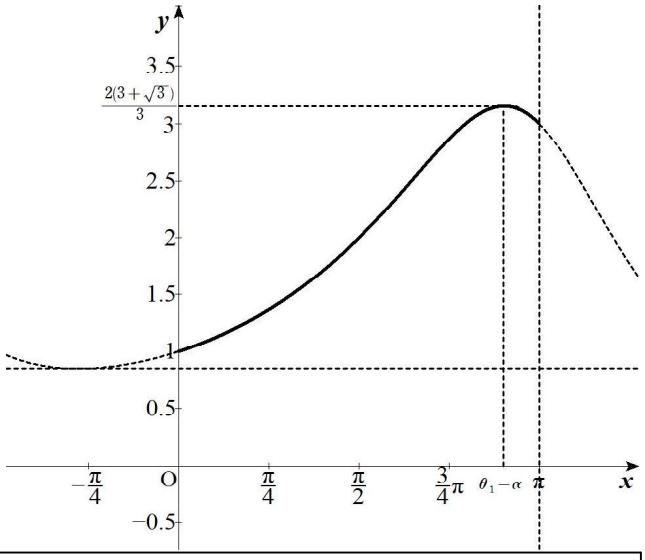
θ	0	$\cdots$	$\theta_1-\alpha$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	1	↗	$\dfrac{2(3+\sqrt{3})}{3}$	↘	3

よって，左の増減表より，

答　最小値　1（$\theta=0$ のとき）

最大値　$\dfrac{2(3+\sqrt{3})}{3}$（$\theta=\theta_1-\alpha$ のとき）

補足　$y=\dfrac{\sin x+3}{\cos x+2}$　（$0\leqq x\leqq\pi$）のグラフ



問題2

(1)　$\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2-6x+10}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答　$\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2-6x+10}=\sqrt{(x+2)^2+(-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+1^2}$ であるから，

A$(-2,\ 2)$，B$(3,\ -1)$，P$(x,\ 0)$ とおくと，与式＝AP＋BP

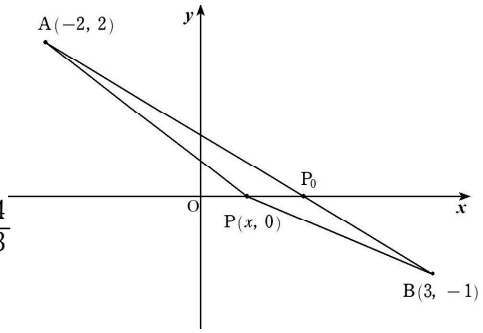
線分 AB と x 軸との交点を P_0 とすると，

AP＋BP≧AP_0+P_0B＝AB（最小値）

AB＝$\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$

P_0 の x 座標は直線 AB：$y-2=\dfrac{-3}{5}(x+2)$ に $y=0$ を代入して，$x=\dfrac{4}{3}$

よって，最小値 $\sqrt{34}$　（$x=\dfrac{4}{3}$ のとき）　答



(2)　$\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2-8y+17}$ の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

解答　与式＝$\sqrt{(x-3)^2+2^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1^2+(y-4)^2}$ より，

A$(3,\ -2)$，B$(-1,\ 4)$，P$(x,\ 0)$，Q$(0,\ y)$ とおくと，

与式＝AP＋PQ＋QB≧AB

（A，P，Q，B が同一直線上にあるとき最小となる）

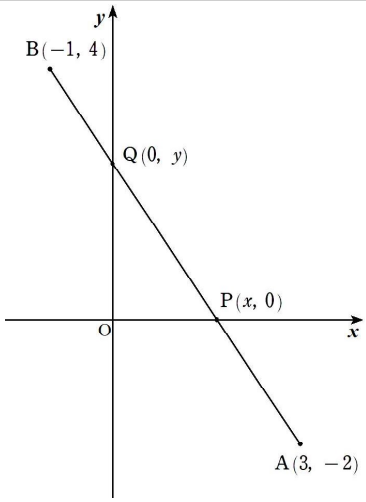
最小値 AB＝$\sqrt{(-1-3)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{13}$

直線 AB の方程式：$y+2=\dfrac{4+2}{-1-3}(x-3)$　…①

①で $y=0$ とおくと，$x=\dfrac{5}{3}$　$\therefore P\left(\dfrac{5}{3},\ 0\right)$

①で $x=0$ とおくと，$y=\dfrac{5}{2}$　$\therefore Q\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$

よって，最小値は $2\sqrt{13}$　（$x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{5}{2}$ のとき）　答



(3)　2定点 $A\left(0,\ \frac{17}{4}\right)$，$B\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ に対し，$y=x^2$ 上に点Pをとる。

AP＋BPの最小値とそのときの点Pの y 座標を求めよ。

解答　2定点を $A(0,\ a)$，$B(0,\ b)$ とおいて考える。$a>b>\frac{1}{4}$ 。

$P(t,\ t^2)$ とおくと，

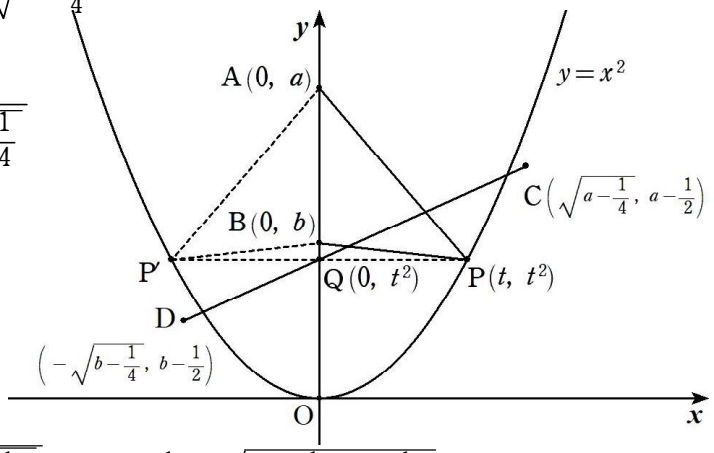
$$AP+BP=\sqrt{t^2+(t^2-a)^2}+\sqrt{t^2+(t^2-b)^2}=\sqrt{a-\frac{1}{4}+\left(t^2-a+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{b-\frac{1}{4}+\left(t^2-b+\frac{1}{2}\right)^2}$$

ここで，$C\left(\sqrt{a-\frac{1}{4}},\ a-\frac{1}{2}\right)$，$D\left(-\sqrt{b-\frac{1}{4}},\ b-\frac{1}{2}\right)$，$Q(0,\ t^2)$ とおくと，AP＋BP＝CQ＋DQ

Qが y 軸上を動くとき，CQ＋DQの値は，Qが直線CDと y 軸との交点のとき，最小となる。（下図）

最小値は，$CD=\sqrt{\left(\sqrt{a-\frac{1}{4}}+\sqrt{b-\frac{1}{4}}\right)^2+(a-b)^2}=\sqrt{(a-b)^2+a+b-\frac{1}{2}+2\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(b-\frac{1}{4}\right)}}$

直線CDの方程式は，$y-\left(a-\frac{1}{2}\right)=\dfrac{a-b}{\sqrt{a-\frac{1}{4}}+\sqrt{b-\frac{1}{4}}}\left(x-\sqrt{a-\frac{1}{4}}\right)$



$x=0$ とおくと，$y=a-\frac{1}{2}-\dfrac{(a-b)\sqrt{a-\frac{1}{4}}}{\sqrt{a-\frac{1}{4}}+\sqrt{b-\frac{1}{4}}}$

$$=-\frac{1}{4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(b-\frac{1}{4}\right)}$$

点Pの y 座標は，点Qの y 座標に等しいから，

$t^2=-\frac{1}{4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(b-\frac{1}{4}\right)}$

まとめると，

最小値 $\sqrt{(a-b)^2+a+b-\frac{1}{2}+2\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(b-\frac{1}{4}\right)}}$　（$y=-\frac{1}{4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(b-\frac{1}{4}\right)}$ のとき）

与えられた問題は，$a=\frac{17}{4}$，$b=\frac{5}{4}$ の場合である。$\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(b-\frac{1}{4}\right)}=2$ であるから，

最小値は，$\sqrt{\left(\frac{17}{4}-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{17}{4}+\frac{5}{4}-\frac{1}{2}+2\cdot 2}=3\sqrt{2}$，そのときの点Pの y 座標は，$-\frac{1}{4}+2=\frac{7}{4}$　答

(2023/3/5　ジョーカー)