第424回問題2

θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を動くとき，$\dfrac{\sin\theta+3}{\cos\theta+2}$ の最小値と最大値を求めよ。

解答　平面座標で考える。

A$(-2,\ -3)$，P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

$\dfrac{\sin\theta+3}{\cos\theta+2}$ は直線 AP の傾きを表す。

B$(1,\ 0)$，C$(-1,\ 0)$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから，

点 P は直径 BC の単位円周の上側を動く。

直線 AP の傾きが最小になるのは，P が B のとき。

そのときの傾きは，$\dfrac{3}{1+2}=1$　（$\theta=0$ のとき）

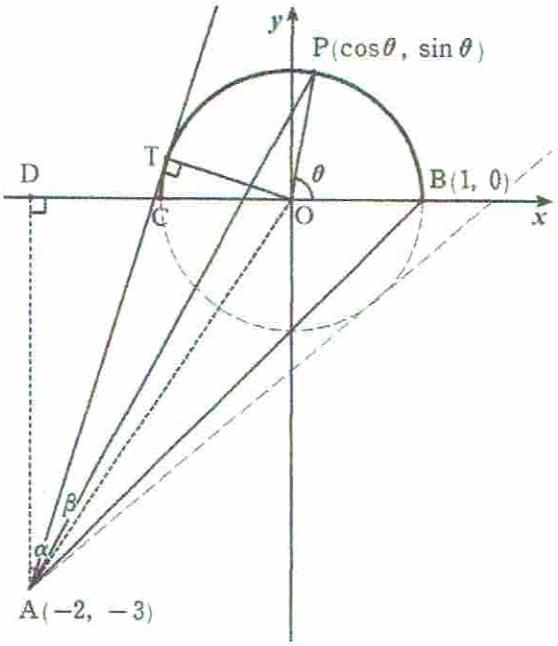
直線 AP の傾きが最大になるのは，P が T（接点）のとき。

そのときの傾きを m とおくと，直線 AT の方程式は，

$y+3=m(x+2)$　$\therefore mx-y+2m-3=0$

$\mathrm{OT}=\dfrac{|2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$ とおくと，$m=\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{3}$

題意に適するのは，$m=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$



そのときの θ を求める。A から x 軸に下した垂線の足を D，$\angle\mathrm{OAD}=\alpha$，$\angle\mathrm{OAT}=\beta$ とおく。

$\triangle\mathrm{OAD}$ において，$\mathrm{OA}=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ より，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$\triangle\mathrm{OAT}$ において，$\mathrm{AT}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$ より，$\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$，$\cos\beta=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$\angle\mathrm{BOT}=\theta_1$ とおくと，$\angle\mathrm{COT}=\pi-\theta_1=\angle\mathrm{CAD}=\alpha-\beta$　$\therefore \theta_1=\pi-(\alpha-\beta)$

$\sin\theta_1=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{13}}=\dfrac{-3+4\sqrt{3}}{13}$

$\cos\theta_1=-\cos(\alpha-\beta)=-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{13}}=-\dfrac{2+6\sqrt{3}}{13}$

よって，最小値 1（$\theta=0$ のとき）

最大値 $\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$（$\theta=\theta_1$ のとき，ただし，$\sin\theta_1=\dfrac{-3+4\sqrt{3}}{13}$，$\cos\theta_1=-\dfrac{2+6\sqrt{3}}{13}$）　答

（2023/3/5　ジョーカー）