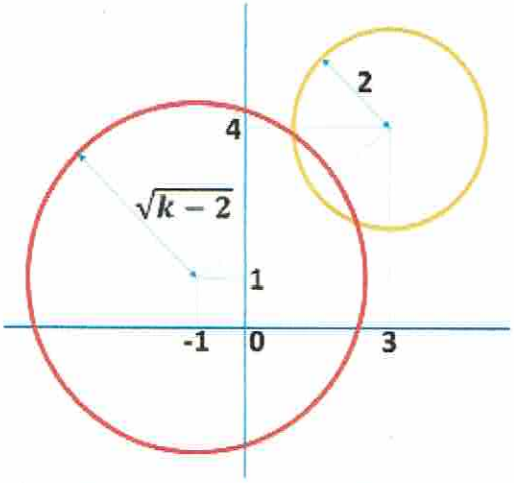
問題1

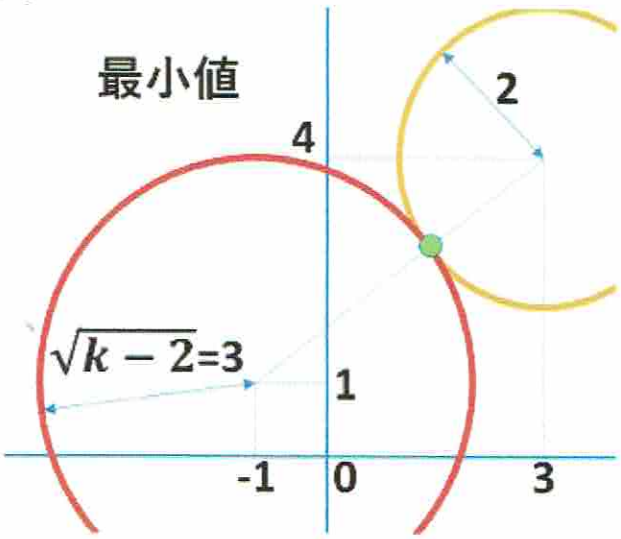
(1)与式=k すると、

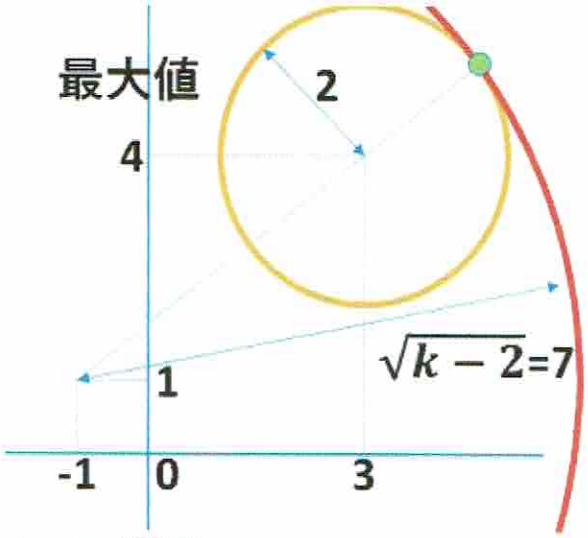
$$(x+1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{k-2})^2$$

と変形できるので、中心(−1,1)、半径$\sqrt{k-2}$の円と捉えることができます。定義域①と合わせて、円の動きを図示すると、次のようになります。




赤円がオレンジ円と交わりながら動くので、半径の最小値・最大値は、図から求めることができます。




赤半径$\sqrt{k-2}=3$⇒k=7

そのときの緑点(x,y)は赤円とオレンジ円の中心を 3:2 に内分するので、

$$(x,y)=\frac{2(-1,1)+3(3,4)}{3+2}=\left(\frac{7}{5},\frac{14}{5}\right)$$

赤半径$\sqrt{k-2}=7$⇒k=47

そのときの緑点(x,y)は赤円とオレンジ円の中心を 7:2 に外分するので、

$$(x,y)=\frac{-2(-1,1)+7(3,4)}{7-2}=\left(\frac{23}{5},\frac{26}{5}\right)$$

以上より、求める最小値・最大値はそれぞれ以下の通りです。

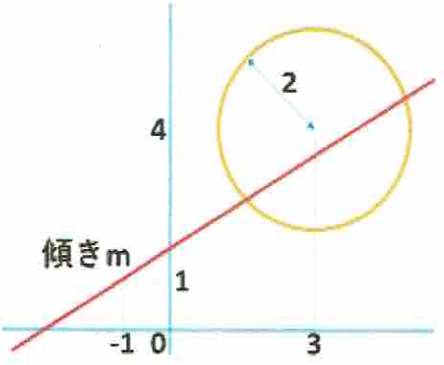
$(x,y)=\left(\frac{7}{5},\frac{14}{5}\right)$のとき 7

$(x,y)=\left(\frac{23}{5},\frac{26}{5}\right)$のとき 47

(2)こちらも与式=m とすると、

y=m(x+1)+1

と変形できるので、定点(−1,1)を通る傾き m の直線と見ることができます。定義域①と直線の動きを図示すると、次のようになります。




赤線がオレンジ円と交わりながら動くので、傾き m の最小値・最大値は、円に接するときの値です。

接線の傾きを求める方法はいくつかありますが、ベクトルを使うのが簡単だと思います。

左図のように点 A、C、P を取ります。

傾き m を$\vec{v}$=(1,m)と表すと、P=A+t$\vec{v}$なので、

$\overrightarrow{CP}$と$\vec{v}$が直交⇒$(A+t\vec{v}-C)\vec{v}=0$

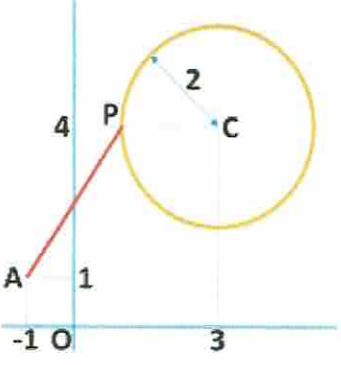
$\Rightarrow(m^2+1)t-3m=4\cdots$①

また、①の半径は 2 なので、

$|\overrightarrow{CP}|=2\Rightarrow(mt-3)^2+(t-4)^2=2^2\cdots$②

です。これらを解いて、

$$(t,m)=\left(\frac{84\pm6\sqrt{21}}{25},\frac{6\mp\sqrt{21}}{6}\right)$$




となります。また、P=A+t$\vec{v}$なので、

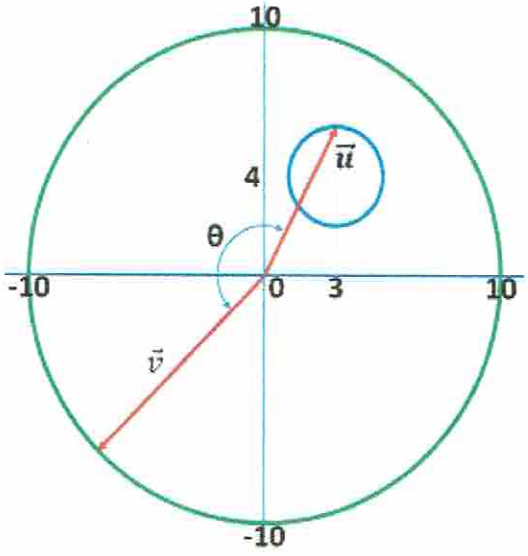
$$P=(-1,1)+\frac{84\pm6\sqrt{21}}{25}\left(1,\frac{6\mp\sqrt{21}}{6}\right)=\left(\frac{59\pm6\sqrt{21}}{25},\frac{8(11\mp\sqrt{21})}{25}\right)$$

よって、求める最小値・最大値はそれぞれ以下の通りです。

$$(x,y)=\left(\frac{59+6\sqrt{21}}{25},\frac{8(11-\sqrt{21})}{25}\right)\text{のとき}\frac{6-\sqrt{21}}{6}$$

$$(x,y)=\left(\frac{59-6\sqrt{21}}{25},\frac{8(11+\sqrt{21})}{25}\right)\text{のとき}\frac{6+\sqrt{21}}{6}$$

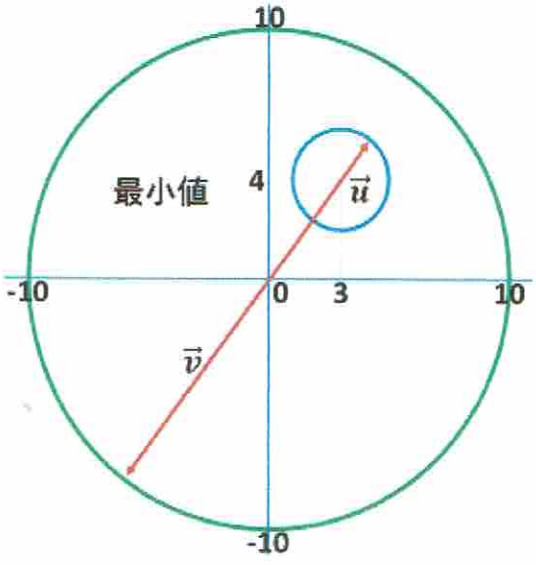
(3)点(a,b)、点(c,d)をベクトル$\vec{u}$、$\vec{v}$としたとき、内積$\vec{u}\cdot\vec{v}$が ac+cd であることに気付けば、すんなり解けると思います。




図のように、$\vec{u}$、$\vec{v}$のなす角を$\theta$とすると、

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

です。すると、$|\vec{v}| = 10$(一定)、$3 \leq |\vec{u}| \leq 7$、$0 \leq \theta \leq 2\pi$なので、$\vec{u}\cdot\vec{v}$の最小値・最大値は下図のようになります。

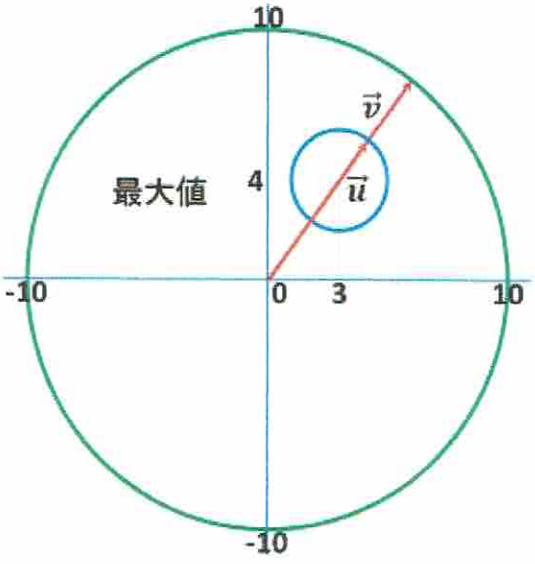



円②の半径は 3 なので、

$$\vec{u} = (3,4) + 2\frac{(3,4)}{|(3,4)|} = \left(\frac{21}{5},\frac{28}{5}\right)$$

円①の半径は 10 なので、

$$\vec{v} = 10\frac{(-3,-4)}{|(3,4)|} = (-6,-8)$$




円②の半径は 3 なので、

$$\vec{u} = (3,4) + 2\frac{(3,4)}{|(3,4)|} = \left(\frac{21}{5},\frac{28}{5}\right)$$

円①の半径は 10 なので、

$$\vec{v} = 10\frac{(3,4)}{|(3,4)|} = (6,8)$$

よって、求める最小値・最大値はそれぞれ以下の通りです。

$a = \frac{21}{5}, b = \frac{28}{5}, c = -6, d = -8$のとき$-70$

$a = \frac{21}{5}, b = \frac{28}{5}, c = 6, d = 8$のとき 70

問題2　定石通りに増減表を作って、最小値・最大値を求めました。

$$f(\theta)=\frac{\sin(\theta)+3}{\cos(\theta)+2}$$

として、$\theta$ で微分して、

$$f(\theta)'=\frac{3\sin(\theta)+2\cos(\theta)+1}{(\cos(\theta)+2)^2}$$

となります。$f(\alpha)'=0$ とすると、分母>0 だから、

$$2\cos(\alpha)+3\sin(\alpha)+1=0\cdots①$$

また、

$$\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2=1\cdots②$$

①②を解いて、

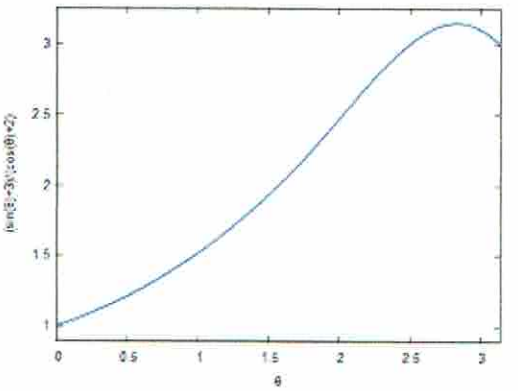
$$\cos(\alpha)=\frac{2(\pm3\sqrt{3}-1)}{13},\sin(\alpha)=\frac{\mp4\sqrt{3}-3}{13}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より、$\sin(\theta)\geqq0$ ですから、

$$\cos(\alpha)=\frac{-2(3\sqrt{3}+1)}{13},\sin(\alpha)=\frac{4\sqrt{3}-3}{13}$$

が有効な解で、$\cos(\alpha)<0$ なので、$\alpha$ は区間$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$にあります。これらをもとに増減表は以下のようになります。

| $\theta$ | 0 | ・・・ | $\alpha$ | ・ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(\theta)'$ | 1/3 | ＋ | 0 | － | −1 |
| $f(\theta)$ | 1 | ↗ | $\frac{2(\sqrt{3}+3)}{3}$ | ↘ | 3 |




よって、求める最小値・最大値はそれぞれ 1、

$\frac{2(\sqrt{3}+3)}{3}$です。

問題3

(1)良い解法を思いつかなかったので、普通にやりました。

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$$

とおいて、微分すると、

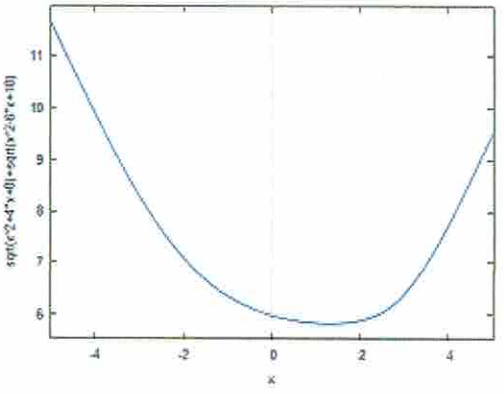
$$f(x)' = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}} + \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$$

です。$f(x)' = 0$として、以下の通り式を変形します。

$$f(x)' = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2-6x+10}}{\sqrt{x^2+4x+8}} = -\frac{x-3}{x+2} \Rightarrow \frac{x^2-6x+10}{x^2+4x+8} = \frac{(x-3)^2}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow (x + 2)^2(x^2 - 6x + 10) - (x - 3)^2(x^2 + 4x + 8) = 0 \Rightarrow (x - 8)(3x - 4) = 0$$

x=8 は不適なので、$f(x)' = 0$となるのは$x = \frac{4}{3}$のときです。グラフの外観は下図の通りです。




f(x)は明らかに下に凸ですから、$x = \frac{4}{3}$で最小値$\sqrt{34}$をとります。

(2)高校数学の範囲内での解法がわかりませんでした。仕方ないので、次のようにやりました。

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{y^2+x^2}+\sqrt{y^2-8y+17}$$

として、

$$f_x=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+13}}$$

$$f_y=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y-4}{\sqrt{y^2-8y+17}}$$

$f_x=f_y=0$とすると、

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+13}}=0\Rightarrow\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{(x-3)^2}{x^2-6x+13}=0\Rightarrow(x-3)^2(x^2+y^2)-x^2(x^2-6x+13)\cdots①$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y-4}{\sqrt{y^2-8y+17}}=0\Rightarrow\frac{y^2}{x^2+y^2}-\frac{(y-4)^2}{y^2-8y+17}=0\Rightarrow(y-4)^2(x^2+y^2)-y^2(y^2-8y+17)\cdots②$$

です。これらを解くと、

$$(x,y)=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)(0,0)\left(7,\frac{7}{2}\right)\left(\frac{7}{3},7\right)(5,5)$$

ですが、$f_x=f_y=0$を満たすのは、$(x,y)=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)$です。次に、二次導関数を求めると、

$$f_{xx}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{4}{(x^2-6x+13)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yy}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(y^2-8y+17)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f(x,y)=-\frac{xy}{(x^2+y)^{\frac{3}{2}}}$$

ですが、$(x,y)=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)$を入れて調べると、

$$f_{xx}=\frac{243}{1013^{\frac{3}{2}}}>0,\triangle=f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=\frac{1296}{10985}>0$$

となりますから、$f\left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)=2\sqrt{13}$は極小であることがわかります。そして、f(x,y)は下に凸なので、求める最小値は$2\sqrt{13}$で、そのとき$(x,y)=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)$です。

(3)点 p(x,y)とすると、距離 f(x)=AP+BP は次式で表すことができます。

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{17}{4})^2} + \sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{5}{4})^2}$$

微分すると、

$$f(x)' = \frac{2x(4x^2 - 3)}{\sqrt{16x^4 - 24x^2 + 25}} + \frac{2x(4x^2 - 15)}{\sqrt{16x^4 - 120x^2 + 289}}$$

$f(x)' = 0$とやって、以下の通り変形します。

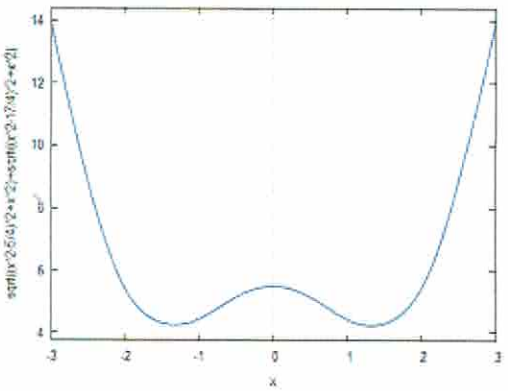
$$f(x)' = 0 \Rightarrow \frac{4x^2(4x^2-3)^2}{16x^4-24x^2+25} - \frac{4x^2(4x^2-15)^2}{16x^4-120x^2+289} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2(4x^2 - 3)^2(16x^4 - 120x^2 + 289) - 4x^2(4x^2 - 15)^2(16x^4 - 24x^2 + 25) = 0$$

$$\Rightarrow 192x^2(4x^2 - 7)(4x^2 + 9) = 0$$

上式の解は x=0, $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$です。増減表を書くと、

| x | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{7}}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x)' | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↘ | $3\sqrt{2}$ | ↗ | $\frac{11}{2}$ | ↘ | $3\sqrt{2}$ | ↗ |




以上より、x=$\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$のとき、f(x)は最小値$3\sqrt{2}$をとります。だから、点 P の y 座標は$\frac{7}{4}$です。