● 問題 424 解答＜三角定規＞

［問題１］

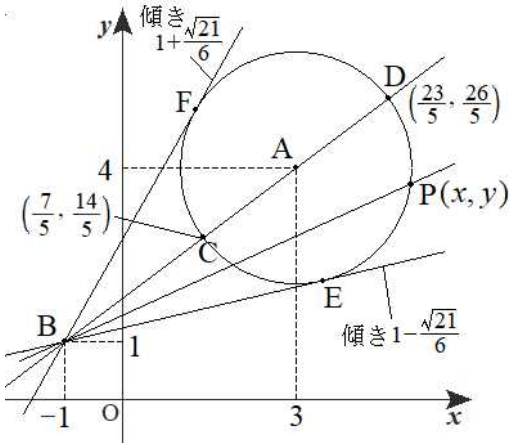
(1) $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ …①

①は，中心 A(3, 4)，半径 2 の円を表す(右図)。

また　$K=x^2+y^2+2x-2y=(x+1)^2+(y-1)^2-2$　で，

$(x+1)^2+(y-1)^2$　は①上の点 $(x,\ y)$ と点 B$(-1,\ 1)$ との距離 r の 2 乗である。

図のように①と直線 AB との交点を C, D とすると，BC が r の最小値 3 を与え，BD が最大値 7 を与える。



以上より

最小値：$K=3^2-2=\mathbf{7}$，$(x,\ y)=\left(\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{14}}{\mathbf{5}}\right)$

最大値：$K=7^2-2=\mathbf{47}$，$(x,\ y)=\left(\dfrac{\mathbf{23}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{26}}{\mathbf{5}}\right)$　…[答]

(2) $m=\dfrac{y-1}{x+1}$ とおくと，m は図の直線 BP の傾きで，m の最小値･最大値は P が E, F のときである。

$y-1=m(x+1)$ …②　と①から y を消去すると

$$(1+m^2)x^2+2(m^2-3m-3)x+m^2-6m+14=0 \quad \cdots③$$

直線 BP が円①に接するとき②は重解をもつから

$$(m^2-3m-3)^2-(1+m^2)(m^2-6m+14)=0$$

整理して　$12m^2-24m+5=0$　$\therefore\ m=1\pm\dfrac{\sqrt{21}}{6}$　…④

④を③に戻し②とから x, y を求めると

$$(x,\ y)=\left(\frac{59\pm 6\sqrt{21}}{25},\ \frac{88\mp 8\sqrt{21}}{25}\right)$$

以上より，求める最小値･最大値は

最小値：$(x,\ y)=\left(\dfrac{\mathbf{59+6\sqrt{21}}}{\mathbf{25}},\ \dfrac{\mathbf{88-8\sqrt{21}}}{\mathbf{25}}\right)$ のときの $\mathbf{1-\dfrac{\sqrt{21}}{6}}$

最大値：$(x,\ y)=\left(\dfrac{\mathbf{59-6\sqrt{21}}}{\mathbf{25}},\ \dfrac{\mathbf{88+8\sqrt{21}}}{\mathbf{25}}\right)$ のときの $\mathbf{1+\dfrac{\sqrt{21}}{6}}$

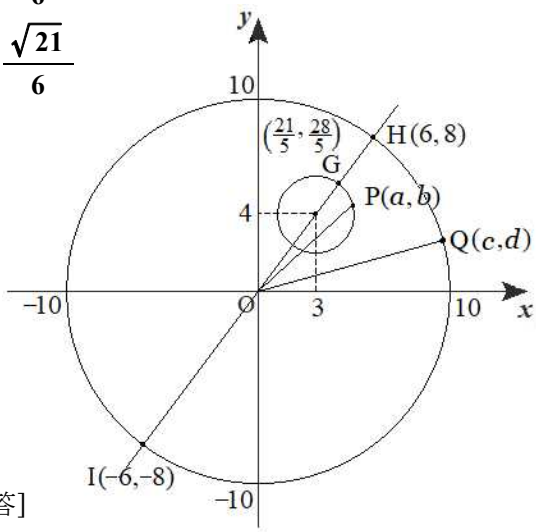
(3) 右図のように各点を定める。

$\overrightarrow{OP}=(a,\ b)$，$\overrightarrow{OQ}=(c,\ d)$ とすると，$ac+bd=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

図で考えると，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ が

最小となるのは，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OI}$　のとき

最大となるのは，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OH}$　のとき



以上より，

最小値：$\dfrac{21}{5}\cdot(-6)+\dfrac{28}{5}\cdot(-8)=\mathbf{-70}$，最大値：$\mathbf{70}$　…[答]

［問題３］

(1) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2-6x+10}$ …①

$$f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}+\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+10}} \quad \cdots②$$

$f'(x)=0$ とする x は方程式

$$(x+2)\sqrt{(x-3)^2+1}+(x-3)\sqrt{(x+2)^2+4}=0,\ -2<x<3$$

の解で，移項し両辺を平方して

$$(x+2)^2\{(x-3)^2+1\}=(x-3)^2\{(x+2)^2+4\}$$

$$\therefore\ (x+2)^2=4(x-3)^2 \quad \therefore\ x+2=\pm(x-3)$$

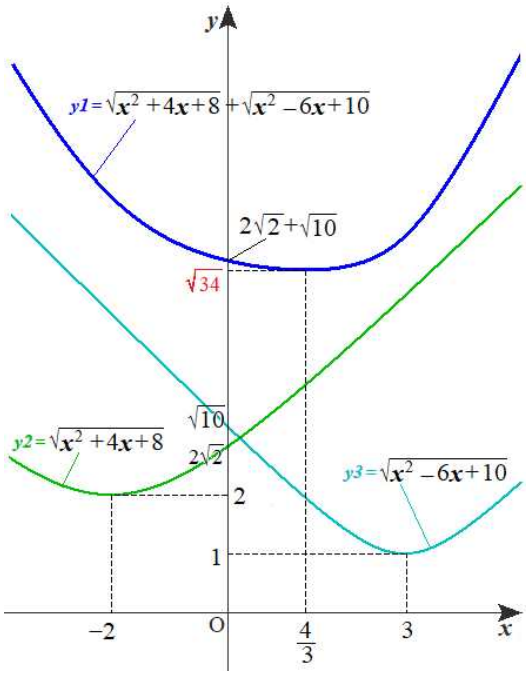
$-2<x<3$ より $x=\dfrac{4}{3}$ …③

③は $f'(x)=0$ の唯一の解だから，$f'(x)$ は③の前後でそれぞれ定符号であり，

$$f'(1)=\frac{3}{\sqrt{13}}-\frac{2}{\sqrt{5}}<0,\ f'(2)=\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}>0$$

より，$x<\dfrac{4}{3}$ で $f'(x)<0$，$\dfrac{4}{3}<x$ で $f'(x)>0$ となるから $x=\dfrac{4}{3}$ は $f(x)$ の最小値を与える。

以上より，求める最小値は $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\boldsymbol{\sqrt{34}}$ …[答]



(2) $f(x, y)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2-8y+17}$ …①

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+13}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \cdots②, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y-4}{\sqrt{y^2-8y+17}} \quad \cdots③$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{(x-3)^2+4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2(x^2+y^2)=x^2\{(x-3)^2+4\},\ 0<x<3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2y^2=4x^2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)y=-2x \quad \cdots④$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0 \Leftrightarrow y\sqrt{(y-4)^2+1}+(y-4)\sqrt{x^2+y^2}=0$$

$$\Leftrightarrow y^2\{(y-4)^2+4\}=(y-4)^2(x^2+y^2),\ 0<y<4$$

$$\Leftrightarrow -y=(y-4)x \quad \cdots⑤$$

$0<x<3,\ 0<y<4$ で④⑤を解いて $x=\dfrac{5}{3},\ y=\dfrac{5}{2}$ …⑥

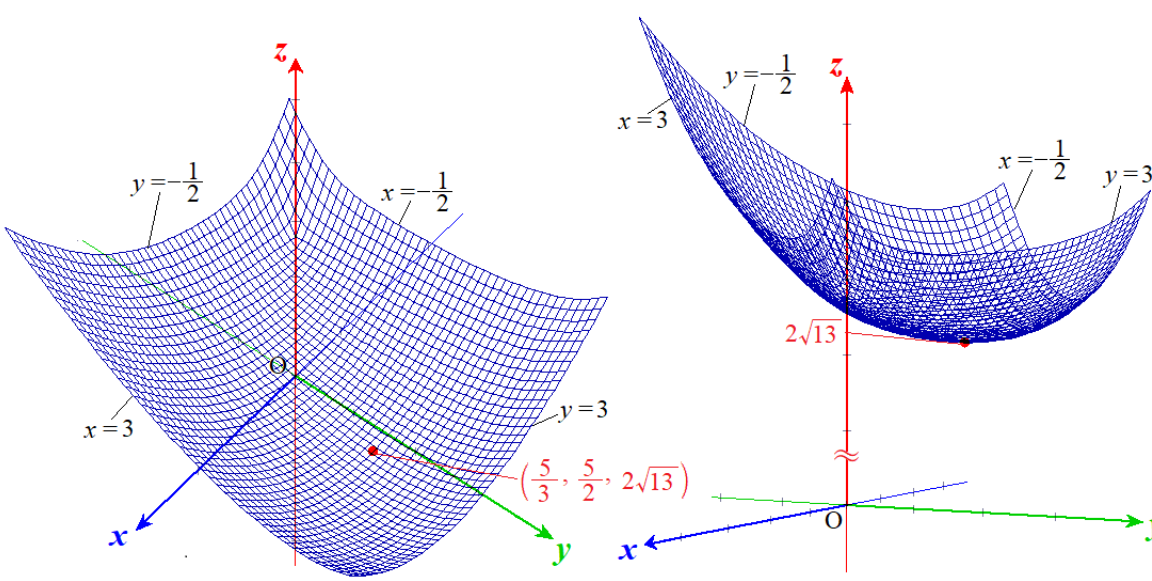
また, $f_{xx}=\dfrac{4}{(x^2-6x+13)^{3/2}}+\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ …⑦

$$f_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \cdots⑧, \qquad f_{yy}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}+\frac{1}{(y^2-8y+17)^{3/2}} \quad \cdots⑨$$

⑥のとき, $f_{xx}=\dfrac{243}{130\sqrt{13}}$, $f_{xy}=-\dfrac{36}{65\sqrt{13}}$, $f_{yy}=\dfrac{64}{65\sqrt{13}}$

で, $f_{xx}>0$, $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ だから⑥は $f(x, y)$ の極小かつ最小値を与える。

以上より, 求める最小値は $f\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{2}\right)=\mathbf{2\sqrt{13}}$ …[答]



$z=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2-8y+17}$