● 問題 428 解答＜三角定規＞

［問題１］

$x^2-yz=2$ …①,　$y^2-zx=3$ …②,　$z^2-xy=4$ …③

②−①: $y^2-x^2-z(x-y)=(y-x)(x+y+z)=1$ …④

③−②: $z^2-y^2-x(y-z)=(z-y)(x+y+z)=1$ …⑤

⑤−④: $(x-2y+z)(x+y+z)=0$ …⑥

(ⅰ) ⑥より $x-2y+z=0$ のとき，$y=\dfrac{x+z}{2}$ …⑦ を①に戻して

$x^2-\dfrac{x+z}{2}\cdot z=2$　∴ $2x^2-xz-z^2=(x-z)(2x+z)=4$ …⑧

⑦を②に戻して，$\left(\dfrac{x+z}{2}\right)^2-zx=\left(\dfrac{x-z}{2}\right)^2=3$　∴ $x-z=\pm 2\sqrt{3}$ …⑨

⑧⑨より　$2x+z=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ …⑩

⑨⑩より $(x,\ z)=\pm\left(\dfrac{8}{3\sqrt{3}},\ -\dfrac{10}{3\sqrt{3}}\right)$ …⑪

⑦⑪より $y=-\left(\pm\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ …⑫

(ⅱ) $x+y+z=0$ のとき，$z=-(x+y)$ …⑬

①⑬より $x^2+y(x+y)=x^2+xy+y^2=2$ …⑭

②⑬より $y^2+(x+y)x=x^2+xy+y^2=3$ …⑮

⑭⑮は矛盾だから $x+y+z\neq 0$

以上より，求める連立方程式の解は　$(x,\ y,\ z)=\pm\left(\boldsymbol{\dfrac{8}{3\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{3\sqrt{3}},\ -\dfrac{10}{3\sqrt{3}}}\right)$ …[答]

［問題２］

$x^3-y^3=296$ …①,　$y^3-z^3=49.625$ …②,　$z^3-u^3=41.375$ …③

$u^3-w^3=33.875$ …④,　$x+y+z+u+w=29$ …⑤　$x,\ y,\ z,\ u,\ w>0$, $x,\ y$：整数

①より　$(x-y)(x^2+xy+y^2)=2^3\cdot 37$ …①′

①′ および　$(x-y)^2<x^2+xy+y^2$　より　$x-y$ と x^2+xy+y^2 がとる値は

$(x-y,\ x^2+xy+y^2)=(1,\ 296),\ (2,\ 148),\ (4,\ 74)$

(ⅰ) $x-y=1$ のとき $x^2+xy+y^2=3x^2-3x+1=296$　だが，これは整数解をもたない。

(ⅱ) $x-y=4$ のとき $x^2+xy+y^2=3x^2-12x+16=74$　だが，これも整数解をもたない。

(ⅲ) $x-y=2$ のとき $x^2+xy+y^2=3x^2-6x+4=148$

$\therefore\ x^2-2x-48=(x-8)(x+6)=0$　$\therefore\ x=8$, このとき $y=6$ …⑥

②⑥より　$z=(6^3-49.625)^{1/3}=5.5$ …⑦

③⑦より　$u=(5.5^3-41.375)^{1/3}=5$ …⑧

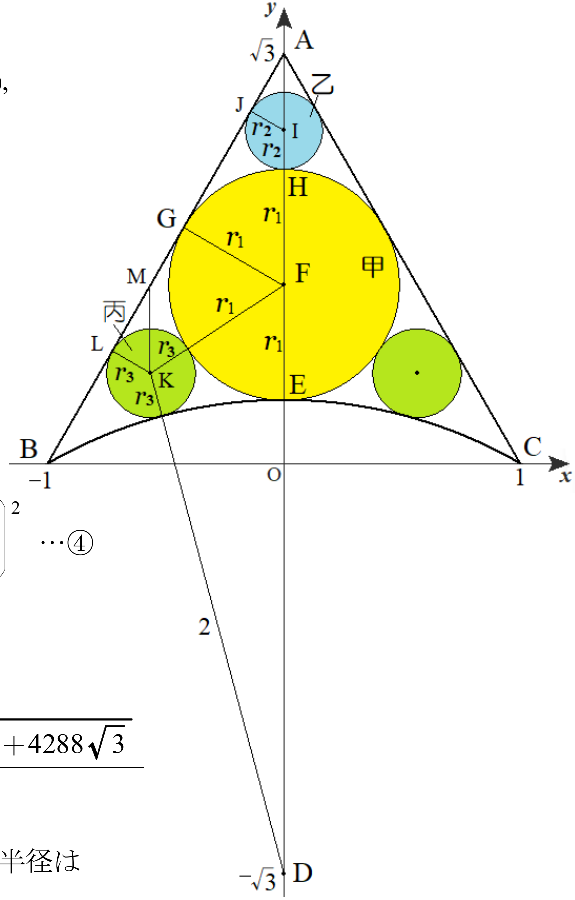
④⑧より　$w=(5^3-33.875)^{1/3}=4.5$ …⑨

⑥⑦⑧⑨は⑤を満たす。以上より 求める解は

$(x,\ y,\ z,\ u,\ w)=$**(8, 6, 5.5, 5, 4.5)**　…[答]

［追加問題１］

計算の便宜上 △ABC を一辺 2 とし, 図のように座標軸, 各点, 座標を定める。D は円弧 BC の中心, F, I, K は甲, 乙, 丙円の中心である。



甲円の半径を r_1 とすると E$(0,\ 2-\sqrt{3})$, F$(0,\ r_1+2-\sqrt{3})$,

AF$=2\sqrt{3}-r_1-2=2r_1=2$FG より， $r_1=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{3}$ …①

乙円の半径を r_2 とすると，①より H$\left(0,\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{3}\right)$,

$r_2 : r_1=$AH : AE$=1:3$ より，$r_2=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{9}$ …②

丙円の中心を $(a,\ b)$, 半径を r_3 とすると

DK$=2$ より　$a^2+(b+\sqrt{3})^2=(r_3+2)^2$ …③

KF$=r_3+r_1$ より　$a^2+\left(b-\dfrac{4-\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(r_3+\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{3}\right)^2$ …④

MK$=2$KL より　$\sqrt{3}\,a-b+\sqrt{3}=2r_3$ …⑤

③④⑤を連立させて解いて　(by WolframAlpha)

$$r_3=\frac{3718+2554\sqrt{3}-16\sqrt{6(5257+2144\sqrt{3})}-24\sqrt{10514+4288\sqrt{3}}}{5941+308\sqrt{3}}$$

以上は AB$=2$ として計算したものだから，求める 3 円の半径は

甲：$r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$ $(=0.244\cdots)$,　乙：$r_2=\dfrac{\sqrt{3}-1}{9}$ $(=0.0813\cdots)$

丙：$r_3=\dfrac{11\cdot13^2+1277\sqrt{3}-2^3\sqrt{2\cdot3(7\cdot751+2^5\cdot67\sqrt{3})}-2^2\cdot3\sqrt{2\cdot7\cdot751+2^6\cdot67\sqrt{3}}}{13\cdot457+2^2\cdot7\cdot11\sqrt{3}}$ $(=0.0938\cdots)$

…［答］