● 問題 432 解答＜三角定規＞

［問題１］

(1) 題意より，$\sqrt{n}$ は自然数 m を用いて

$$m < \sqrt{n} < m + \frac{1}{10} \quad \cdots ①$$

と表せる。各辺を 2 乗し

$$m^2 < n < m^2 + \frac{m}{5} + \frac{1}{100} \quad \cdots ②$$

②を満たす自然数 n を定めることができる m の最小値は $m = 5$ で

$25 < n < 26 + \frac{1}{100}$ より，$n = \mathbf{26}$ …[答]

(2) ②を満たす n は,

<第 1 群> $5 \leqq m \leqq 9$ のとき $n = m^2 + 1$ の 1 個ずつ 5 個。

<第 2 群> $10 \leqq m \leqq 14$ のとき $n = m^2 + 1,\ m^2 + 2$ の 2 個ずつ 10 個。

……………………………………

<第 k 群> $5k \leqq m \leqq 5k + 4$ のとき $n = m^2 + 1,\ m^2 + 2,\ \cdots,\ m^2 + k$ の k 個ずつ $5k$ 個。

……………………………………

となるから，<第 k 群>末までの n の個数 N は $N = \sum_{i=1}^{k} 5i = \frac{5k(k+1)}{2}$ …③ で,

<第 5 群>末までで75個。

よって，100番目は <第 6 群>第25項 ($m = 34$ の 第 1 項) $n = 34^2 + 1 = \mathbf{1,157}$ …[答]

(3) $2026 = 45^2 + 1,\ 45 = 5 \cdot 9$ だから，2026 は<第 9 群>第 1 項。

よって，$\frac{5 \cdot 8 \cdot 9}{2} + 1 = \mathbf{181}$ **番目** …[答]

［問題２］

題意より，$\sqrt{n}$ は自然数 m を用いて $m < \sqrt{n} < m + \frac{1}{100}$ …①

と表せる。各辺を 2 乗し

$$m^2 < n < m^2 + \frac{m}{50} + \frac{1}{10000} \quad \cdots ②$$

②を満たす自然数 n を定めることができる m の最小値は $m = 50$ で

$50^2 < n < 50^2 + 1 + \frac{1}{10000}$ より，$n = \mathbf{2501}$ …[答]

［追加問題２］

$$f(x)=(1-x)(1-3x)(1-5x)\cdot\cdots\cdot\{1-(2n-1)x\} \quad \cdots①$$

$f(x)$ を展開したときの x の係数 $C(1)$ は

$$C(1)=\sum_{i=1}^{n}\{-(2i-1)\}=-n(n+1)+n=\boldsymbol{-n^2} \quad \cdots[答]$$

$f(x)$ を展開したときの x^2 の係数 $C(2)$ は

$$C(2)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\{-(2i-1)\}\{-(2j-1)\}=\sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)\sum_{j=i+1}^{n}(2j-1) \quad \cdots②$$

②の j についての和 $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n}(2j-1)=\left(\sum_{j=1}^{n}-\sum_{j=1}^{i}\right)(2j-1)=n^2-i^2 \quad \cdots③$

②③より $\displaystyle C(2)=\sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)(n^2-i^2)=-\sum_{i=1}^{n-1}2i^3+\sum_{i=1}^{n-1}i^2+n^2\sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)$

$$=（省略）=\frac{1}{6}n(3n^3-4n^2+1)=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n-1)(3n^2-n-1)} \quad \cdots④ \quad \cdots[答]$$

$f(x)$ を展開したときの x^3 の係数 $C(3)$ は

$$C(3)=\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\{-(2i-1)\}\{-(2j-1)\}\{-(2k-1)\}=-\sum_{i=1}^{n-2}(2i-1)\sum_{j=i+1}^{n-1}(2j-1)\sum_{k=j+1}^{n}(2k-1) \quad \cdots⑤$$

⑤の $j,\ k$ についての和$\displaystyle=\sum_{j=i+1}^{n-1}(2j-1)(n^2-j^2)=（省略）=\frac{1}{6}(3n^4-4n^3-6n^2i^2+n+3i^4+4i^3-i) \quad \cdots⑥$

⑤⑥より $\displaystyle C(3)=-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n-2}(2i-1)(3n^4-4n^3-6n^2i^2+n+3i^4+4i^3-i)$

$$=（省略）=\boldsymbol{-\frac{1}{6}n^2(n^4-4n^3+4n^2+n-2)} \quad \cdots[答]$$

$f(x)$ を展開したときの x^4 の係数 $C(4)$ は，同様の計算を繰り返すことにより

$$C(4)=\sum_{i=1}^{n-3}(2i-1)\sum_{j=i+1}^{n-2}(2j-1)\sum_{k=j+1}^{n-1}(2k-1)\sum_{l=k+1}^{n}(2l-1)$$

$=（省略）=$ ← 大変な計算

$$=\boldsymbol{\frac{1}{360}(n-3)(n-2)(n-1)n(15n^4-30n^3-25n^2+12n+7)} \quad \cdots[答]$$

……………………………………

$f(x)$ を展開したときの x^n の係数 $C(n)$ は，

$$\mathrm{C}(n)=\prod_{i=1}^{n}\{-(2i-1)\}=\boldsymbol{(-1)^n(2n-1)!!} \quad \cdots[答]$$