第433回

$\sqrt{n}$ に最も近い整数を a_n とする。また，実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす k を $[x]$ で表す。
このとき，次の式の(1)，(3)，(4)は n で表し，(2)，(5)，(6)は値を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2+n}\frac{1}{a_k}$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2023}\frac{1}{a_k}$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2+n}\frac{k}{a_k}$　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2+n}\left[\frac{k}{a_k}\right]$　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{35}\frac{1}{[\sqrt{n}]}$　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2024}\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$

解答

(1) $a_n = a$ （$\sqrt{n}$ に最も近い整数を a ）とすると，n は整数であるから，$a-\dfrac{1}{2}<\sqrt{n}<a+\dfrac{1}{2}$ を満たす。

各辺を2乗すると，$(a-1)a+\dfrac{1}{4}<n<a(a+1)+\dfrac{1}{4}$

n は整数であるから，$(a-1)a+1 \leqq n \leqq a(a+1)$　…①
これを満たす整数の個数を数えると，$a(a+1)-\{(a-1)a+1\}+1=2a$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n(n+1)}\frac{1}{a_k}=\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{a}\times 2a=2n$　答

(2) $44\cdot 45=1980<2023<2070=45\cdot 46$ であるから，(1)より，

$$\sum_{k=1}^{2023}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{1980}\frac{1}{a_k}+\sum_{k=1981}^{2023}\frac{1}{a_k}=2\cdot 44+\frac{1}{45}\times(2023-1981+1)=88+\frac{43}{45}=\frac{4003}{45}$$　答

(3) $1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ であるから，(1)より，

$$\sum_{k=1}^{n^2+n}\frac{k}{a_k}=\sum_{a=1}^{n}\frac{\frac{1}{2}a(a+1)\{a(a+1)+1\}-\frac{1}{2}(a-1)a\{(a-1)a+1\}}{a}=\sum_{a=1}^{n}(2a^2+1)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n(2n^2+3n+4)$$　答

(4) $a_n=a$ （$\sqrt{n}$ に最も近い整数を a ）とすると，(1)の①より，$(a-1)a+1 \leqq n \leqq a(a+1)$ であるから，
ガウス記号内の分数の分母が a となるのは $2a$ 個あり，それらの部分和は，

$$\left[\frac{a^2-a+1}{a}\right]+\left[\frac{a^2-a+2}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{a^2-1}{a}\right]+\left[\frac{a^2}{a}\right]+\left[\frac{a^2+1}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{a^2+a-1}{a}\right]+\left[\frac{a^2+2a}{a}\right]$$
$$=\ (a-1)\ +\ (a-1)\ +\cdots+\ (a-1)\ +\ a\ +\ a\ +\cdots+\ a\ +\ (a+1)$$
$$=(a-1)\cdot(a-1)+a\cdot a+(a+1)\cdot 1=2a^2-a+2$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2+n}\left[\frac{k}{a_k}\right]=\sum_{a=1}^{n}(2a^2-a+2)=2\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)+2n=\frac{1}{6}n(4n^2+3n+11)$　答

(5) $[\sqrt{n}]=a$ とおくと，$a \leqq \sqrt{n} < a+1$ より，$a^2 \leqq n \leqq (a+1)^2-1$　…②
これを満たす整数 n の値の個数は，$(a+1)^2-a^2=2a+1$ （個）であるから，

$$\sum_{n=1}^{35}\frac{1}{[\sqrt{n}]}=\sum_{n=1}^{(5+1)^2-1}\frac{1}{[\sqrt{n}]}=\sum_{a=1}^{5}\frac{2a+1}{a}=\sum_{a=1}^{5}\left(2+\frac{1}{a}\right)=2\cdot 5+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{737}{60}$$　答

(6) (5)より，$[\sqrt{n}]=a$ とおくと，②を満たす整数 n の値は，$(a+1)^2-a^2=2a+1$ （個） あり，
②を満たす n について，

$$\sum_{k=a^2}^{(a+1)^2-1}\left[\frac{k}{[\sqrt{k}]}\right]$$

$$=\left[\frac{a^2}{a}\right]+\left[\frac{a^2+1}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{a^2+a-1}{a}\right]+\left[\frac{a^2+a}{a}\right]+\left[\frac{a^2+a+1}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{a^2+2a-1}{a}\right]+\left[\frac{a^2+2a}{a}\right]$$

$$=\quad a \quad + \quad a \quad + \cdots + \quad a \quad + \ (a+1) \ + \ (a+1) \ + \cdots + \ (a+1) \ + \ (a+2)$$

$$=a\times a+(a+1)\times a+(a+2)\times 1=2(a^2+a+1)$$

$2024=(44+1)^2-1$ であるから，

$$\sum_{n=1}^{2024}\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]=\sum_{a=1}^{44}2(a^2+a+1)=2\left(\frac{1}{6}\cdot 44\cdot 45\cdot 89+\frac{1}{2}\cdot 44\cdot 45+44\right)=60808$$ 答

追加問題

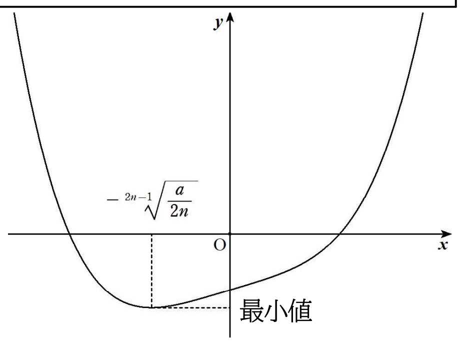
n を自然数とする。$-1\leqq a\leqq 1$， $-1\leqq b\leqq 1$ のとき， 方程式 $x^{2n}+ax+b=0$ が実数解をもつ確率を $P(n)$ とおく。

(1) $P(n)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P(n)$ を求めよ。

解答 (1) $f(x)=x^{2n}+ax+b$ とおく。

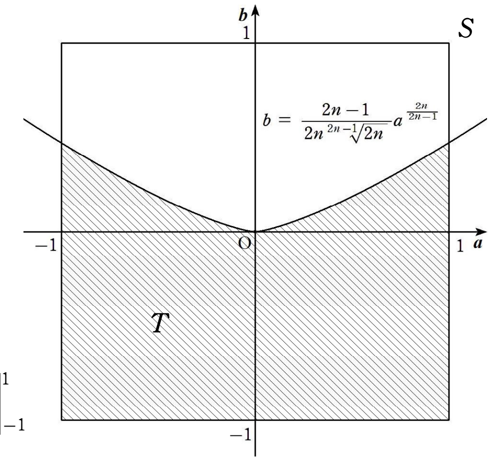
$f'(x)=2nx^{2n-1}+a=0$ とおくと， $x=-\sqrt[2n-1]{\dfrac{a}{2n}}$



x	$\cdots$	$-\sqrt[2n-1]{\frac{a}{2n}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小かつ最小	↗

最小値 $f\left(-\sqrt[2n-1]{\dfrac{a}{2n}}\right)=b-\dfrac{2n-1}{2n}a\sqrt[2n-1]{\dfrac{a}{2n}}\leqq 0$ のとき実数解をもつ。

$\therefore b\leqq\dfrac{2n-1}{2n\sqrt[2n-1]{2n}}a^{\frac{2n}{2n-1}}$



$S=\{(a,\ b)\mid -1\leqq a\leqq 1,\ -1\leqq b\leqq 1\}$，

$T=\left\{(a,\ b)\mid -1\leqq a\leqq 1,\ -1\leqq b\leqq 1,\ b\leqq\dfrac{2n-1}{2n\sqrt[2n-1]{2n}}a^{\frac{2n}{2n-1}}\right\}$

とおくと，求める確率 $P(n)=\dfrac{T\text{の面積}}{S\text{の面積}}$ である。

明らかに， $S=4$

$$T=2+\int_{-1}^{1}\frac{2n-1}{2n\sqrt[2n-1]{2n}}a^{\frac{2n}{2n-1}}da=2+\left[\frac{2n-1}{2n\sqrt[2n-1]{2n}}\cdot\frac{2n-1}{4n-1}a^{\frac{4n-1}{2n-1}}\right]_{-1}^{1}$$

$$=2+\frac{(2n-1)^2}{n(4n-1)\sqrt[2n-1]{2n}}$$ である。

よって， $$P(n)=\frac{2+\dfrac{(2n-1)^2}{n(4n-1)\sqrt[2n-1]{2n}}}{4}=\frac{1}{2}+\frac{(2n-1)^2}{4n(4n-1)\sqrt[2n-1]{2n}}$$ 答

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P(n)=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}{4\left(4-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{(2n)^{\frac{1}{2n-1}}}$

ここで，$2n-1=x$ とおくと，$x\to\infty$ のとき，$n\to\infty$ であるから，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n)^{\frac{1}{2n-1}}=\lim_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\log(x+1)}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\frac{1}{x+1}}{1}}$ （∵ロピタルの定理により）$=1$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P(n)=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{4\cdot4}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{4}$ 答

（2023/11/16　ジョーカー）