$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m$を n の関数として表現する式を求めるのは計算が複雑なので比較的容易に求める方法はないかと思い考えました。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = f_m(n)$ とおきます。
それは次の 3 つの手順により $f_1(n), f_2(n), f_3(n), f_4(n), \cdots$ と順に求める事ができます。
①最高次の係数が 1 になるように定数をかけます。
②積分します。定数項は 0 にします。
③各係数の和が 1 になるように 1 次の項を加えます。
では順にこれを繰り返して、実際にり $f_1(n)$ から $f_2(n), f_3(n), f_4(n)$ を求めてみましょう。
$f_1(n) = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$
　①より $n^2 + n$ とします。　　②より$\dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2}$となります。　③より$\dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{1}{6}n$ となります。これが $f_2(n)$ です。
$f_2(n) = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{1}{6}n$
　①より $n^3 + \dfrac{3n^2}{2} + \dfrac{1}{2}n$ とします。　　②より$\dfrac{n^4}{4} + \dfrac{n^3}{2} + \dfrac{n^2}{4}$となります。
　③より係数の和が 1 になっているので 1 次の項はありません。これが $f_3(n)$ です。
$f_3(n) = \dfrac{n^4}{4} + \dfrac{n^3}{2} + \dfrac{n^2}{4}$
　①より $n^4 + 2n^3 + n^2$とします。　　②より$\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3}$となります。
　③より$\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$となります。これが $f_4(n)$ です。

　以下が証明と解説です。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = f_m(n)$ とおきます

このとき、関数 $f_m(n)$ の性質と漸化式を求め、それを用いて $f_1(n), f_2(n), \cdots$ と順に求めてみましょう。

$f_m(n)$ は次の漸化式を満たしています。
　(1) $f_m(n) - f_m(n-1) = n^m$
　(2) $f_m(1) = 1$
ここで、n を x とし、実数全体で定義された関数 $f_m(x)$ を次の漸化式を満たす関数として定義します。
　(1) $f_m(x) - f_m(x-1) = x^m \cdots$ 条件①
　(2) $f_m(1) = 1 \cdots$ 条件②
性質 1　$f_m(0) = 0$ である。
　(理由)$f_m(x) - f_m(x-1) = x^m$で $x = 1$ を代入すると $f_m(1) - f_m(0) = 1$ となり、条件②を用いれば $f_m(0) = 0$ となる
性質 2　$f_m(x)$ の定数項は 0 である。
性質 3　$f_m(x) + c$ という関数も条件①を満たしている。
　　$(f_m(x) + c) - (f_m(x-1) + c) = f_m(x) - f_m(x-1) = x^m$
性質 4　$f_m(x)$ から $f_{m-1}(x)$ を求めることができる
①を x で微分すると $f'_m(x) - f'_m(x-1) = mx^{m-1}$となるので, $\dfrac{f'_m(x)}{m} - \dfrac{f'_m(x-1)}{m} = x^{m-1}$である。
したがって、$\dfrac{f'_m(x)}{m}$は m が $m-1$ のときの漸化式①を満たしている。
しかし、$\dfrac{f'_m(x)}{m}$は一般的には条件②を満たしていない。
そこで、$\dfrac{f'_m(x)}{m} + c$ という関数を考えると条件②を満たすようにすることができる。
そのためには、条件②は定数項 $= 0$ なので定数項を消せばよい。
例：$f_3(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^2}{4} (= \displaystyle\sum_{k=1}^{x} k^3)$
$$f'_3(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} \qquad \frac{f'_3(x)}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

$$f_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} (= \sum_{k=1}^{x} k^2)$$

$$f_2'(x) = x^2 + x + \frac{1}{6} \qquad \frac{f_2'(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$$

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} (= \sum_{k=1}^{x} k)$$

上のように考えると $f_m(x)$ から $f_{m-1}(x)$ を求めることができます。

この方法を逆にすることによって $f_1(x), f_2(x), \cdots$ と順に求めることができます。
$f_m(x) + c$ という関数が条件①を満たしているので、

$$\int \{f_m(x) + c\}dx - \int \{f_m(x-1) + c\}dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

ここで $\int \{f_m(x) + c\}dx$ の定数項は 0 とすることにします。($f_{m+1}(x)$ の定数項は 0 なので。)

したがって、$(m+1)\int \{f_m(x) + c\}dx - (m+1)\int \{f_m(x-1) + c\}dx = x^{m+1}$

ここで、$(m+1)\int \{f_m(x) + c\}dx$ が条件②を満たすように定数 c を決める事ができれば、$(m+1)\int \{f_m(x) + c\}dx$ が $f_{m+1}(x)$ となります。

例 $\quad f_1(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} (= \sum_{k=1}^{x} k)$

$$2\int \{f_1(x) + c\}dx = \int (x^2 + x + c)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + cx \qquad (f_m(0) = 0 \text{ より定数項は } 0)$$

ここで $f_m(1) = 1$ なので $\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + c = 1$、そこで $c = \frac{1}{6}$

故に $f_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x$

$f_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x$

$$3\int \{f_2(x) + c\}dx = \int (x^3 + \frac{3x^2}{2}x + \frac{1}{2}x + cx)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} + cx$$

ここで $f_m(1) = 1$ なので $\frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} + \frac{1^4}{4} + c = 1$、そこで $c = 0$

故に $f_3(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$

$f_3(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$

$$4\int \{f_3(x) + c\}dx = \int (x^4 + 2x^3 + x^2)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + cx$$

ここで $f_m(1) = 1$ なので $\frac{1^5}{5} + \frac{1^4}{2} + \frac{1^3}{3} + c = 1$、そこで $c = \frac{-1}{30}$

故に $f_4(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}$